QUINTANA ROO
GOBIERNO DEL ESTADO
2016 • 2022

MÁS Y MEJORES OPORTUNIDADES

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE QUINTANA ROO

MATEMÁTICAS 3

Material Didáctico del Estudiante

III

SEMESTRE

Directorio

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

Mtra. Yolanda del Rosario Loría Marín
Directora Académica

Lic. Mario Velázquez George
Subdirector Académico

Mtra. Cindy Jazmín Cuellar Ortiz
Jefa del Departamento de Docencia y Apoyo Académico

Elaboración, revisión y aprobación:

Mtro. Antonio Puc Pool, **Docente del Plantel Tihosuco**
Mtro. Jairo Isaí Pacheco Pérez, **Docente del Plantel Sabán**
Lic. Inés Carreón Martínez, **Docente del Plantel Cancún Cuatro**
Ing. Wendy Guadalupe Brito García**, Docente del Plantel Cancún Uno**
Ing. Wilberth Eduardo Lara Peraza**, Docente del Plantel Cancún Dos**
Lic. Carlos Mariel Chan Ramayo, **Docente del Plantel Cancún Dos**
Lic. Juan Carlos Aguilar Escudero, **Docente del Plantel Chetumal Uno**

Revisión y Actualización:
Mtra. Jessica Vianey Cortés Talamantes, **Jefa de Materia del Área de Matemáticas**
Ing. Wendy Guadalupe Brito García**, Docente del Plantel Cancún Uno**

Diseño de portada:
Lic. Juan Naim Góngora Piña, **Responsable del Área de Comunicación y Difusión**

Avenida Héroes #310 entre Justo Sierra y Bugambilias
Col. Adolfo López Mateos
Chetumal, C.P. 77010, Othón P. Blanco, Quintana Roo

PRESENTACIÓN

Estimada y estimado estudiante:

Me es grato darte la bienvenida al nuevo semestre que estás por iniciar. En la Dirección General del Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, estamos comprometidos con el desarrollo educativo que recibirás durante el bachillerato; por ello, el cuadernillo que ahora posees, es producto de un esfuerzo y trabajo conjuntos entre los docentes y los responsables de las áreas académicas de nuestras oficinas centrales.

Si bien es cierto la pandemia trajo consecuencias negativas, ello no representa un impedimento para no cumplir con nuestra labor educativa, razón esencial de nuestra gran institución. Por ello, hoy más que nunca, la labor académica es vital para alcanzar nuestro principal objetivo: tu formación escolar que contribuya a consolidar tu proyecto de vida.

El contenido de este *Material didáctico del estudiante*, te permitirá ejercitar los contenidos de tus diferentes programas de estudio. Por supuesto, estarás respaldado por la asesoría y seguimiento de cada uno de tus docentes y autoridades educativas. Cada una de las personas que laboramos en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo ponemos lo mejor de nosotros para seguir caminando juntos para generar resiliencia y fortalecer las competencias académicas y socioemocionales que nos permitan salir adelante.

Te invito a no bajar la guardia en lo académico y en el cuidado de tu salud. Trabaja intensamente, con compromiso y con responsabilidad; sé responsable y perseverante, ello te llevará al éxito y a cumplir tus metas. Te deseo lo mejor para este semestre que inicia.

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nuestro compromiso es continuar generando estrategias que te permitan fortalecer los aprendizajes de las diversas asignaturas, por esta razón ponemos a tu disposición este documento, el cual se construyó con la participación de maestras y maestros del área de matemáticas de todo el estado, quienes con mucha dedicación y esfuerzo diseñaron actividades tomando en consideración los aprendizajes esperados y las competencias de los programas de estudio y que estamos seguros te permitirán continuar con tu formación académica.

Es importante mencionar que, este cuadernillo contiene una serie de actividades que te permitirán alcanzar los aprendizajes esperados de la asignatura de Matemáticas 3, iniciaremos recordando algunos conocimientos previos del campo de las matemáticas, que adquiriste en tus semestres anteriores y que te servirán de puente hacia la comprensión de la aplicación de la Geometría Analítica. Este bloque lo hemos denominado Bloque 0.

Esta asignatura se compone de 5 bloques que te ayudarán a resolver problemas que te permitan percibir e interpretar el entorno espacial aplicando la Geometría Analítica y los conceptos propuestos: Lugares geométricos en el plano, Línea recta, Circunferencia, Parábola y Elipse. Cada actividad contiene una lectura previa que te permitirá comprender los contenidos principales, posteriormente encontrarás las instrucciones precisas para desarrollarla y la descripción del instrumento con la que será evaluada. Se hace énfasis en que practiques el proceso de autoevaluación, de tal manera que puedas reflexionar sobre las dificultades a las que te enfrentaste y los aprendizajes que lograste al final de cada bloque, no olvides tomar nota en tu libreta de todo aquello que observaste en tu proceso de aprendizaje para que posteriormente puedas comentar con tu maestra o maestro.

También, considera dos herramientas básicas para el desarrollo de las actividades como lo son: tener a la mano un juego de geometría o cualquier objeto que te permita realizar trazos en tu libreta, así como recuperar la calculadora científica del semestre anterior para realizar algunos cálculos matemáticos implicados en las actividades.

Sabías que hay una App creada para el estudio de la geometría y que es totalmente gratuita y la puedes encontrar en internet, te la presento, se llama **GeoGebra**, si cuentas con tu celular la puedes descargar en tu Play Store (Android) o App Store (Apple) (*aparece como graficadora*), verás que es muy sencilla y divertida de usar. Si no la puedes descargar no te preocupes es únicamente una herramienta de apoyo, la entrega de las actividades no dependerá de su uso y aplicación. Observa el Anexo 1 al final de este material didáctico, el cual contiene información relevante para su descarga.

Te recomendamos dedicar un horario determinado de estudio ya que las realizarás a través de la autogestión, encuentra un espacio en casa que te permita estar cómodo y con el menor número de distracciones, así como revisa las instrucciones de cada actividad para completarla con éxito.

Recuerda que las matemáticas son importantes en tu formación, pues promueven el razonamiento, al mismo tiempo desarrolla tu capacidad de análisis, tu pensamiento crítico, tomar decisiones informadas e imaginar soluciones posibles a problemas. Algunas actividades te pueden parecer fáciles, otras quizá más difíciles, pero no te desanimes, con un poco de esfuerzo y perseverancia estamos seguros que podrás concluirlas satisfactoriamente.

Finalmente, es necesario que te mantengas comunicado con tu maestro o maestra para establecer las fechas y los mecanismos de entrega, así como los criterios de evaluación, no te sientas solo, estamos para apoyarte y acompañarte en este camino.

¡Éxito!

BLOQUE 0. Aprendizajes previos

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve ejercicios de operaciones con números reales mediante la ley de los signos y jerarquía de operaciones
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Leyes de los signos / Jerarquía de operaciones

Lectura previa

- **Leyes de los signos:**

Cuando hablamos de leyes de signos, nos referimos a la aplicación de los mismos en las operaciones básicas, tanto en la aritmética como en el álgebra, como lo son: la suma, resta, multiplicación y división.

Tabla 1. Leyes de los signos

Para la multiplicación	Para la división
Multiplicación de dos elementos con signos iguales es positivo: (+)(+)=+ (–)(–)=+ Multiplicación de dos elementos con signos diferentes es negativo: (+)(–)=– (–)(+)= -	División de dos elementos con signos iguales es positivo: $\frac{+}{+} = +$ $\frac{(-)}{(-)} = +$ División de dos elementos con signos diferentes es negativo: $\frac{+}{-} = -$ $\frac{-}{+} = -$

Nota: Observa que para la multiplicación y división de dos elementos las leyes de los signos son las mismas.

Ejemplos

1) (+3)(–2) = – 6 **2)** (–4)(–2) = 8 **3)** $(-5)^2$=25 * **4)** $(-5)^3$ = -125**

5) – (–6) = 6*** **6)** $\frac{-100}{(-5)^2} = -4$

*Un exponente entero positivo es un indicador de repetición del factor base, así en el ejemplo 3), el exponente 2 indica que la base –5 se repite como factor dos veces, así: $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

**En el ejemplo 4 el exponente 3 indica que la base –5 se repite como factor tres veces, así

$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$. La multiplicación de signos es binaria (en parejas), así los dos primeros signos negativos multiplicados dan positivo y al multiplicar este positivo por el tercer negativo resulta negativo.

***En la duplicidad de signos estando uno de ellos antecediendo un paréntesis, se aplica la ley de multiplicación. Así, en el ejemplo 5 el menos que antecede al paréntesis toma el papel de un (–1) no escrito. Así, – (–6) es lo mismo que (–1)(–6), cuyo resultado es +6.

****En el ejemplo 6 se combinan leyes tanto de la multiplicación como de la división, al tener un factor repetido en el denominador.

En la suma, se suele confundir especialmente la simplificación de dos elementos negativos, colocándole al resultado signo positivo, al multiplicar equivocadamente sus signos.

Ejemplo:

$-6-3=9$ Es incorrecto; La suma de números negativos da resultado negativo. Así,

$-6-3=-9$ Sería algo ilógico multiplicar los signos y sumar los números.

Observa otros ejemplos:

1) $(+4)+(+5)+(3) = 4+5+3 = 12$

2) $-3-2-5=-10$

3) $(-7)+(-8) = -7-8 = -15$

4) $(0)(-5)=0$ El cero es un elemento neutro

5) $(9)(-4)=-36$

Actividad 0.1.1

Instrucciones:

1. Resuelve en tu libreta los siguientes ejercicios propuestos.

Ejercicios propuestos:

1) $(-8 \div 2) + 3\ 2 =$

2) $5\ 2 - (-36 \div 9) =$

3) $4\ (3-2) \div 1 =$

4) $(12)(3) \div (54 \div 6) =$

5) $(12 \div 3)\ 2 - 2\ 3 =$

- **Signos de agrupación o jerarquía de operaciones.**

Operaciones con signos de agrupación.

Normalmente establecemos a los paréntesis como el signo de agrupación de mayor jerarquía, seguido de los corchetes y éstos a su vez de las llaves. Cada uno lo antecede un factor, que puede ser un signo, un número o elemento algebraico.

Para eliminar signos de agrupación, se deben reducir los elementos agrupados en los paréntesis, luego los corchetes y finalmente las llaves. Es decir, de menor a mayor jerarquía.

Ejemplos

1) $-(5-3)$

$= -5+3$

$= -2$

2) $2\{4-6\}$

$= 8-12$

$= -4$

3) $-\{-4(-6+9)\}$

$= -\{24-36\}$ Suprimiendo paréntesis

$= -24+36$ Suprimiendo llaves

$= 12$

4) $-(5-7)-\{3-[4(-11+7)]\}$

$= -5+7-\{3-[-44+28]\}$ Suprimiendo paréntesis

$= -5+7-\{3+44-28\}$ Suprimiendo corchetes

$= -5+7-3-44+28$ Suprimiendo llaves

$= -17$

Reducción de signos de agrupación con contenido algebraico:

5) $-\{\boldsymbol{4x}+[\boldsymbol{-3x}-(\boldsymbol{5x}-\boldsymbol{4y})+\boldsymbol{8z}]\}$

$= -\{4x+[-3x-5x+4y+8z]\}$ Suprimiendo paréntesis

$= -\{4x - 3x - 5x + 4y + 8z\}$ Suprimiendo corchetes

$= -4x + 3x + 5x - 4y - 8z$ Suprimiendo llaves

$= \mathbf{4x} - 4y - 8z$ Reduciendo términos semejantes

6) $-\{-[-(-\mathbf{7x} - \mathbf{2y})]\} + \{-[-(\mathbf{2y} + \mathbf{7x})]\}$

$= -\{-[7x + 2y]\} + \{-[-2y - 7x]\}$ Suprimiendo paréntesis

$= -\{-7x - 2y\} + \{2y + 7x\}$ Suprimiendo corchetes

$= 7x + 2y + 2y + 7x$ Suprimiendo llaves

$= 14x + 4y$ Reduciendo términos semejantes

Reducción de signos de agrupación con contenido fraccionario:

7)

$$12 - 3\left[\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right) - \frac{3}{15}\right]$$

Al suprimir el paréntesis, la fracción $\frac{5}{3}$ debe multiplicar tanto a $\frac{2}{5}$ como a $\frac{3}{10}$ y recomendamos que siempre simplifique cada vez que opere con fracciones. Recuerda que la multiplicación de fracciones es directa.

$$=12 - 3\left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{15}\right]$$

Suprimiendo el paréntesis y simplificando fracciones

$$=12 - \frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5}$$

Suprimiendo el corchete y simplificando fracciones

$$= \frac{240}{20} - \frac{15}{20} - \frac{40}{20} - \frac{30}{20} + \frac{12}{20}$$

En este ejercicio el denominador común mínimo es 20 por lo que, tanto enteros como fracciones se convierten a veinteavos, que simplificados dan:

$$= \frac{167}{20}$$

Actividad 0.1.2

Instrucciones:

1. Resuelve en tu libreta los siguientes ejercicios propuestos.

Ejercicios propuestos:

1) $2x+[x-(x+y)]$

2) $3a-[a+b-(2a+b)]$

3) $2x-[(x-y)-(x+y)+1]$

4) $x^2-\{-7xy+[-y^2+(-x^2+3xy-2y^2)]$

5) $-\frac{2}{3}-\left\{\frac{4}{5}+\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{4}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]\right\}=$

Evaluación:

- Para evaluar las actividades 1.1 y 1.2 se utilizará el instrumento de evaluación 1, revisa en la parte posterior de tu cuadernillo la sección de instrumentos de evaluación.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza la técnica de completar trinomio cuadrado perfecto para reescribir ecuaciones cuadráticas.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Completar trinomio cuadrado perfecto.

Lectura previa

Completar Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

Desde la secundaria se enseña la regla para elevar un binomio al cuadrado:

$(a+b)^2 = (primero)^2 + 2(primero)(segundo) + (segundo)^2$ refiriéndose a ambos términos del binomio.

Escrito a manera de regla quedaría: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

El resultado de elevar un binomio al cuadrado se denomina **"Trinomio cuadrado Perfecto"**. Así, por ejemplo: $(x-6)^2 = (x)^2 + 2(x)(-6) + (-6)^2$

$$(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36 \quad \textbf{Este es un TCP}$$

Característica de un TCP: en el ejemplo anterior podemos observar que en el TCP $x^2 - 12x + 36$, el $36 = \left[\frac{-12}{2}\right]^2$, esta regla se cumple para todos los trinomios cuadrados perfectos de esta forma. Es decir, un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ será un TCP si se cumple que $c = \left[\frac{b}{2}\right]^2$

Actividad 0.2.1

Instrucciones:

1. Sigue el ejemplo del llenado de las primeras tres filas, comprende el proceso y completa la tabla en tu libreta.

Expresión $x^2 + bx + c$	¿Es un TCP?	Porque	Binomio al cuadrado equivalente
$x^2 - 10x + 25$	Sí	$25 = \left[\frac{-10}{2}\right]^2$	$(x-5)^2$.
$x^2 + 8x - 16$	No	$-16 \neq \left[\frac{8}{2}\right]^2$	No tiene binomio al cuadrado equivalente
$x^2 - 3x + \frac{9}{4}$	Sí	$\frac{9}{4} = \left[\frac{-3}{2}\right]^2$	$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
$x^2 + 2x + 2$			
$x^2 + x + \frac{1}{4}$			
$x^2 - 4x + 4$			
$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$			
$y^2 - 5y$			

Al avanzar en este curso, te verás en la necesidad de transformar expresiones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx + c$, que no son cuadrados perfectos, en formas equivalentes que contengan binomio al cuadrado. Este método de transformación se le llama COMPLETAR TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Completar Trinomio Cuadrado Perfecto

Es una técnica para reescribir cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c$ por una equivalente de la forma $(x + h)^2 + d$ También para reescribir cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$ por una equivalente de la forma $a(x + h)^2 + d$ donde "h" y "d" son números racionales.

Por ejemplo, $x^2 + 2x + 3$ puede reescribirse como $(x+1)^2 + 2$. Las dos expresiones son completamente equivalentes.

Así también, $3x^2 - 12x + 8$ puede reescribirse como $3(x-2)^2 - 4$, siendo ambas equivalentes.

El proceso para completar un trinomio cuadrado perfecto es muy sencillo, se basa en la técnica de agregar un sumando a la expresión para completar el TCP y al mismo tiempo restarlo para neutralizar lo agregado sin afectar el valor de la expresión.

Ejemplo 1

Expresión para transformar: x^2+8x-3

¿Qué número debe haber después del 8x para que sea un TCP? Según la regla debe ser $\left[\frac{8}{2}\right]^2$,

o sea 16. Pero no lo tenemos, entonces lo agregamos y al mismo tiempo lo restamos para no alterar el valor de la expresión: $x^2+8x+16$ – 3 -16. Con el TCP formamos el binomio al cuadrado y los otros términos los simplificamos, quedando la equivalencia así:

$$\underbrace{x^2+8x+16}\underbrace{-3-16}$$

x^2+8x-3 es equivalente a $(x+4)^2-19$

¿Y si tenemos una expresión de la forma ax^2+bx+c?

El procedimiento es casi el mismo que en el caso anterior, solo tenemos que factorizar al término cuadrático y al término lineal el factor "a" y completar TCP dentro del paréntesis.

Ejemplo 2

Expresión a transformar: $3x^2-12x+8$:

Se factoriza el 3 a los términos cuadrático y lineal: $3(x^2-4x)+8$.

Se completa TCP dentro del paréntesis neutralizando lo agregado con un número negativo fuera del paréntesis: $3(x^2-4x+4)+8-12$.

Sin duda preguntarás, ¿por qué si agregamos un +4 neutralizamos con un -12? Observa que el +4 que agregamos está dentro del paréntesis multiplicado por 3, por lo que en realidad hemos agregado un +12.

Continuamos factorizando el TCP como un binomio al cuadrado y simplificamos el resto de los números quedando la equivalencia así: $3(x-2)^2-4$.

Entonces $3x^2-12x+8$ es equivalente a $3(x-2)^2-4$.

¿Y si "a" no es factor del término lineal?

Ejemplo 3

Expresión a transformar: $2x^2 - 3x - 1.$

Se factoriza el 2 a los términos cuadrático y lineal; como el 2 no es factor del 3, se coloca un 2 como denominador del 3, y la factorización será correcta:

$$2(x^2 - \frac{3}{2}x) - 1.$$

Se completa TCP dentro del paréntesis con $+\frac{9}{16}$ y se neutraliza fuera del paréntesis con $-\frac{9}{8}$:

$2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) - 1 - \frac{9}{8}$

Se factoriza el TCP como binomio al cuadrado y se simplifica el resto de los números y obtenemos la equivalencia: $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$, así:

$$2x^2 - 3x - 1 \text{ es equivalente a } 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$$

Actividad 0.2.2

Instrucciones:

1. En la siguiente tabla se dan dos ejemplos más de la técnica de completar TCP para buscar equivalencias a expresiones cuadráticas que contengan binomio al cuadrado, complete la tabla realizando las operaciones adecuadas para hallar las equivalencias de las expresiones que están en los renglones subsiguientes:

Expresión	Completando TCP para su transformación	Equivalencia
$x^2 + 2x - 3$	$\underbrace{x^2 + 2x + 1}\underbrace{-3 - 1}$ $(x+2)^2 \quad - \quad 4$	$x^2 + 2x - 3$ Equivalente a $(x+2)^2 \quad - \quad 4$
$4y^2 - y + 2$	$4(y^2 - \frac{1}{4}y) + 2$ $\underbrace{4(y^2 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64})}\underbrace{+2 - \frac{1}{16}}$ $4\left(y - \frac{1}{8}\right)^2 \quad + \quad \frac{31}{16}$	$4y^2 + y + 2$ Es equivalente a $4\left(y - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{31}{16}$

Expresión	Completando TCP para su transformación	Equivalencia
x^2+8x-1		
y^2+3y		
$3x^2-9x+\frac{13}{4}$		
$2y^2+2y+1$		

Evaluación:

- Para evaluar las actividades 2.1 y 2.2 se utilizará el instrumento de evaluación 1, revisa en la parte posterior de tu cuadernillo la sección de instrumentos de evaluación.

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve ejercicios en los cuales se despeja una variable de una expresión algebraica, usando la transposición de términos.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Transposición de términos

Lectura previa

En primer semestre, con tu docente abordaron el tema de ecuaciones, recuerda que una ecuación es una expresión algebraica que contiene términos desconocidos, llamadas incógnitas. En matemáticas utilizamos letras o literales para representar las incógnitas, siendo la x la de uso más común.

Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas. Sólo se cumple la igualdad cuando se le da determinados valores a esas incógnitas. Observa en la siguiente figura que existe un signo “= “separando la expresión en dos partes

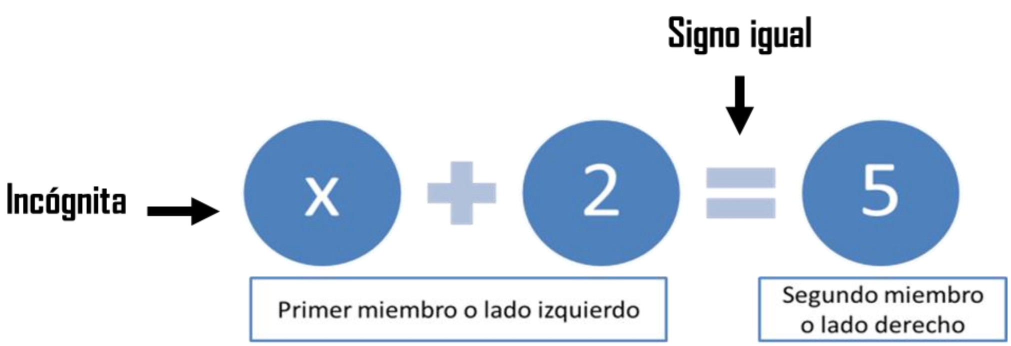


Figura 1

De lado izquierdo de la igualdad se denomina **Primer miembro**

Del lado derecho de la igualdad se denomina **Segundo miembro**

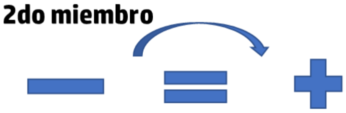
◉ Transposición de términos

Transposición de términos
Es una propiedad por la cual podemos mover términos y operaciones desde un miembro de la ecuación al otro en operación invertida.

Transposición de la suma: pasa a restar al 2do miembro

Ejemplo: $a + b = c \rightarrow a = c - b$

Transposición de la resta: pasa a sumar al 2do miembro

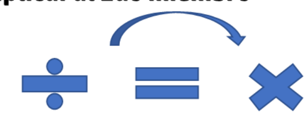


Ejemplo: $a - b = c \rightarrow a = c + b$

Transposición de la multiplicación: pasa a dividir al 2do miembro

Ejemplo: $a \times b = c \rightarrow a = \frac{c}{b}$

Transposición de la división: pasa a multiplicar al 2do miembro



Ejemplo: $\frac{a}{b} = c \rightarrow a = c \times b$

Figura 2

De forma resumida, siempre que un valor cambia de miembro, cambia también la operación (pasa a la inversa). Así: la cantidad que estaba sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro. La cantidad que estaba dividiendo, pasa multiplicando, etc.

Veamos los siguientes ejemplos:

Tabla 2. Ecuaciones con una operación (transposición de términos)

Ejemplo 1 **X + 12 = 25** En el 1er. miembro de la igualdad se representa una suma, pasara al 2do., miembro de la igualdad mediante una resta. **X = 25 – 12**	**Ejemplo 2** **a - 9 = 17** En el 1er. miembro de la igualdad se representa una resta, pasara al 2do., miembro de la igualdad mediante una suma. **a = 17 + 9**
Ejemplo 3 **3n = 45** En el 1er. miembro de la igualdad se representa una multiplicación, pasara al 2do., miembro de la igualdad mediante una división. $\mathbf{n = \frac{45}{3}}$	**Ejemplo 4** $\mathbf{\frac{b}{6} = 17}$ En el 1er. miembro de la igualdad se representa una división, pasara al 2do., miembro de la igualdad mediante una multiplicación, como no podemos usar el signo por "X", lo sustituimos por el paréntesis ( ), para representar la multiplicación. **b = 17(6)**

Fuente: Secretaría de Educación de Campeche (2021). Matemáticas 1 ° Secundaria: Ecuaciones de primer grado. Recuperado de [https://media.educacioncampeche.gob.mx › file](https://media.educacioncampeche.gob.mx)

Ejemplo 5

Visualiza el siguiente ejemplo donde se aplica la transposición de términos

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}=d \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2}=d-\frac{b}{4}-\frac{c}{3} \quad \rightarrow \quad a=2\left(d-\frac{b}{4}-\frac{c}{3}\right)$$

Ejemplo 6

¿Y qué pasa con la potencia? en este caso se cambia a raíz

$$a^2 = b \rightarrow a = \sqrt{b}$$

$$x^2 + 2 = 11$$

$$x^2 = 11 - 2$$

$$x = \sqrt{11-2}$$

La transposición de términos es una forma para hallar los valores desconocidos de una ecuación, además es muy utilizado en el despeje de fórmulas.

Considera los siguientes puntos para hallar los valores desconocidos de una ecuación:

- Cuando se invierten totalmente los miembros de una ecuación, los valores y las operaciones se conservan

$$2x + 3 = 8x - 10 \quad \rightarrow \quad 8x - 10 = 2x + 3$$

- Siempre coloca los términos de una incógnita en el primer miembro

$$2x + 3 = 8x - 10 \quad \rightarrow \quad 2x - 8x = -10 - 3$$

- El término que tiene la incógnita, debe ser siempre positivo; en caso de que sea negativo, se debe multiplicar toda la expresión por (-1)

$$-3x = 4$$

$$-3x(-1) = 4(-1) \quad \rightarrow \quad 3x = -4$$

Observa los siguientes ejemplos, para aplicar la transposición de términos para resolver una ecuación:

Ejemplo 7

Resolver la ecuación:

$$3x + 2 = 5$$

$$3x = 5 - 2$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

¿Recuerdas cuál es la fórmula que te permite calcular el área de un rectángulo?

$$A = b \times h$$

Está fórmula te permite conocer el área de un rectángulo, siendo A la incógnita que aparece en el primer miembro y las demás cantidades en el segundo. Pero cuando conocemos el área y su base pero desconocemos el valor de su altura, tenemos que despejar otro término de un valor desconocido, en este caso h. Para ello, hay que empezar a hacer transposición de términos con el fin de aislar la incógnita de los valores conocidos.

$$A = b \times h \quad \rightarrow \quad h = \frac{A}{b}$$

Actividad 0.3

Instrucciones:

1. Realiza en tu libreta los siguientes ejercicios, aplicando la transposición de términos

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $x + 3 = 8$
b) $16 - x = 3$
c) $2x - 3 = 7(x - 4)$

Despeja la incógnita que se te pide de las siguientes fórmulas

a) Despeja h de $A = 2\pi rh$
b) Despeja b de $P = a + b + c$
c) Despeja r de $S = 4\pi r^2$
d) Despeja P de $P = \frac{F}{A}$
e) Despeja h de $A = \frac{(B+b)}{2}(h)$

Evaluación: Para evaluar la actividad se utilizará el instrumento de evaluación 1, revisa en la parte posterior de tu cuadernillo la sección de instrumentos de evaluación.

Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Analiza el Teorema de Pitágoras para resolver ejercicios o problemas.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Teorema de Pitágoras

Lectura previa

Teorema de Pitágoras[1]

El teorema de Pitágoras se utiliza para determinar la longitud de los lados de un triángulo rectángulo

Establece que el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del área de los cuadrados de los catetos, como se observa en la figura

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25\ cm^2 = 25\ cm^2$$

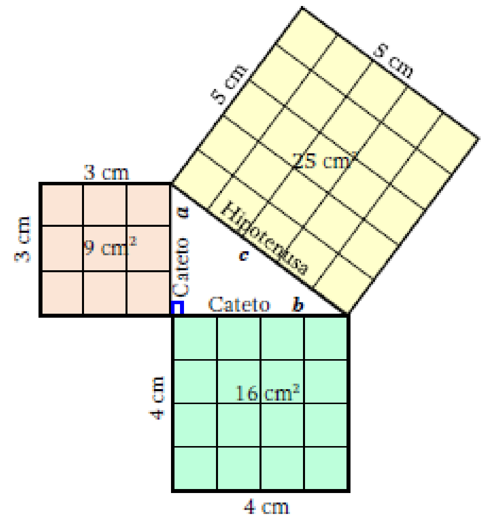
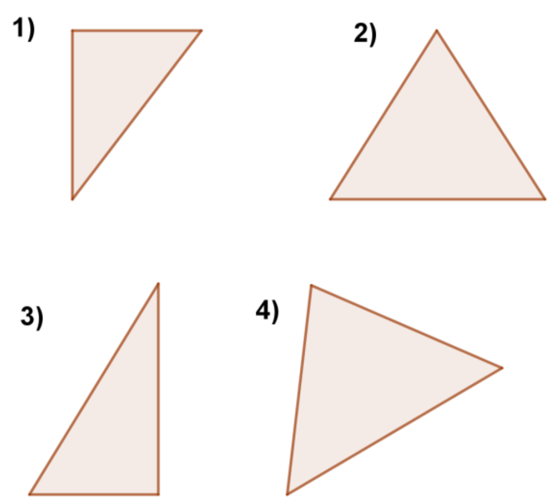


Figura 3

Instrucciones:

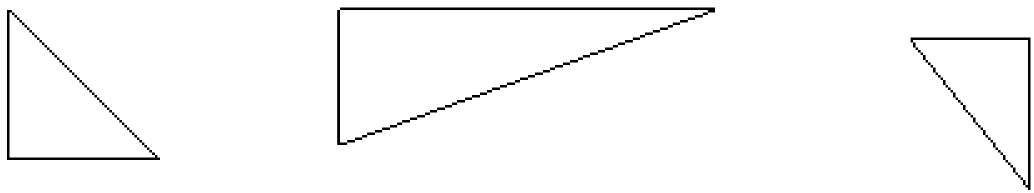
1. Resuelve en tu libreta los siguientes ejercicios:

I. ¿Cuáles de los siguientes triángulos son triángulos rectángulos? ¿Por qué?

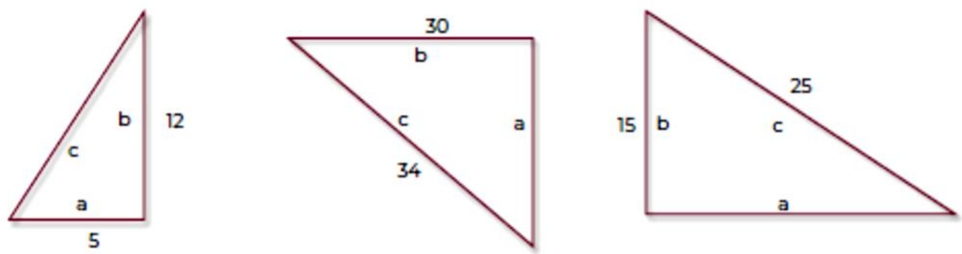


[1] 1Subsecretaría de Educación Media Superior (2020). Evaluación diagnóstica al ingreso a la educación media superior 2020-2021. México: Secretaría de Educación Pública.

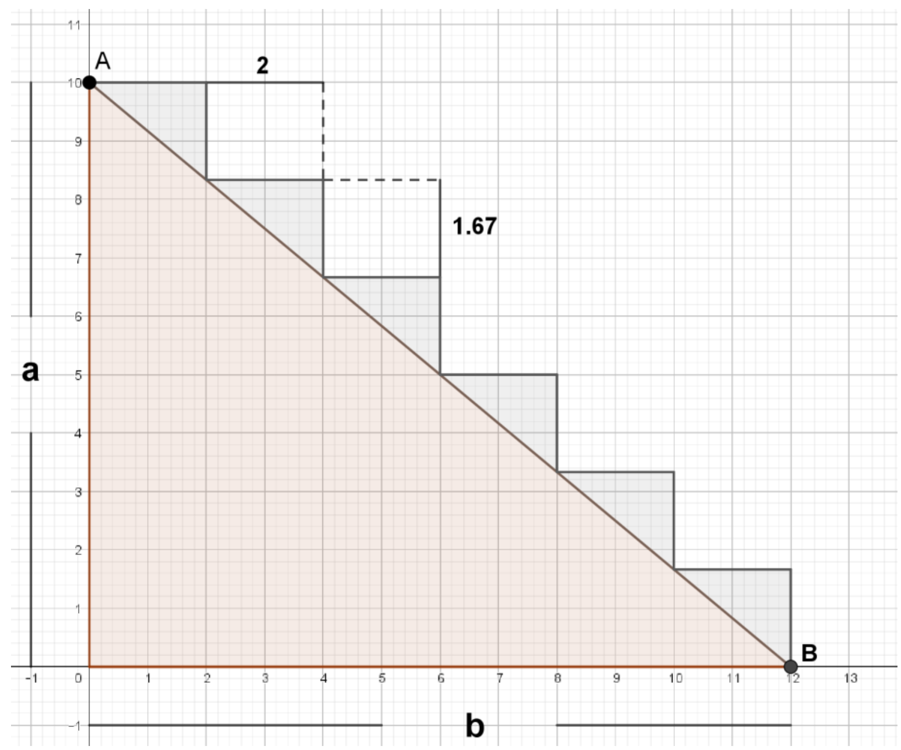
II. En los siguientes triángulos, indiquen cuáles son los catetos y cuál es la hipotenusa:



III. Calcula la medida del lado faltante en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos



IV. Analiza la siguiente imagen y determina una estrategia para calcular la longitud del punto A al B



Evaluación: Para evaluar la actividad se utilizará el instrumento de evaluación 1, revisa en la parte posterior de tu cuadernillo la sección de instrumentos de evaluación.

Actividad 5

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve ejercicios de ecuaciones lineales mediante el uso de métodos analíticos.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Ecuaciones lineales dos variables / Ecuaciones lineales tres variables

Lectura previa

Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando nos planteamos la resolución de varias ecuaciones a la vez con varias incógnitas, estamos ante un sistema y en el caso más sencillo, donde todas las ecuaciones sean lineales, se llama sistema de ecuaciones lineales.

Solución de un sistema

Una pareja de valores es la solución de un sistema si al sustituir dichos valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema éstas se satisfacen, es decir, se satisface la igualdad.

Por ejemplo: el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 5 \quad y \quad x - y = 1$

Tiene como solución a la pareja de valores: $x = 3 \quad y \quad y = 2$

Porque al sustituir estos valores en cualquiera de las ecuaciones éstas se satisfacen:

Sistema 2x2

Un sistema 2x2 significa dos ecuaciones lineales con dos incógnitas lo podemos escribir de la siguiente forma:

Forma equivalente

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad\qquad a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad\qquad a_2x + b_2y = c_2$$

Si una pareja de valores, como por ejemplo $x = d$ y $y = e$ satisfacen simultáneamente a ambas ecuaciones, decimos que es solución del sistema.

Los sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas pueden tener:

1. Ninguna solución
2. Una infinidad de soluciones
3. Una única solución

I. Métodos de solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: el método gráfico, el método de suma o resta, el método de sustitución y el método de determinantes. En este bloque abordaremos únicamente el método de suma o resta y el de determinantes, que te serán de utilidad en el estudio de la Geometría Analítica.

a) Método de suma o resta

Este método depende de la consideración de que es posible sumar dos igualdades. Es decir:

Si $A = B$

y $C = D$

Entonces: $A + C = B + D$

Si consideramos el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

Identificamos como

A-- $a_1x + b_1y$ B-- c_1

C-- $a_2x + b_2y$ D-- c_2

Para entender más esta propiedad de la igualdad resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de suma o resta.

$$2x - 8y = 22 \qquad (1)$$

$$5x + 3y = 9 \qquad (2)$$

<u>Solución:</u>

Paso 1 Para que una de las incógnitas se elimine al sumar miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2) para eliminar x debemos de lograr que estos términos tengan el mismo valor, pero signo contrario por lo que vamos a utilizar los coeficientes de las x de las dos ecuaciones y multiplicarlos de manera cruzada.

Multiplicar la ecuación (1) por -5	$-5(2x - 8y = 22)$	$-10x + 40y = -110$
Multiplicar la ecuación (2) por 2	$2(5x + 3y = 9)$	$10x + 6y = 18$

Paso 2 Suma verticalmente los resultados, como los signos de x son contrarios, se eliminan y nos queda una ecuación lineal fácil de resolver.

$$\begin{array}{r} -10x + 40y = -110 \\ 10x + 6y = 18 \\ \hline 46y = -92 \\ y = -\dfrac{92}{46} = -2 \end{array}$$

Paso 3 Para encontrar el valor de x, el valor obtenido de y se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

Utilicemos la ecuación (2)

$5x + 3y = 9$	
$5x + 3(-2) = 9$	Sustituir $y = -2$
$5x - 6 = 9$	Simplificar
$5x = 9 + 6$	Sumar (6) a ambos miembros de la ecuación (o comúnmente si está restando pasa sumando)
$5x = 15$	Simplificar
$x = \dfrac{15}{5}$	Multiplicar por $\left(\frac{1}{5}\right)$ ambos lados (o comúnmente si está multiplicando pasa dividiendo)
$x = 3$	

La solución del sistema es $x = 3 \qquad y = -2$

Paso 4 Comprobación

Veamos si las ecuaciones que forman el sistema se satisfacen al sustituir los valores obtenidos.

$$\begin{array}{rl} 2x - 8y = 22 & (1) \\ 2(3) - 8(-2) = 22 & \\ 6 + 16 = 22 & \\ 22 = 22 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5x + 3y = 9 & (2) \\ 5(3) + 3(-2) = 9 & \\ 15 - 6 = 9 & \\ 9 = 9 & \end{array}$$

Solución de ecuaciones lineales con 3 variables

Sistema 3x3

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es de la forma:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema por el método de suma o resta

$$x - 2y + 3z = 4 \qquad (1)$$
$$2x + y - 4z = 3 \qquad (2)$$
$$-3x + 4y - z = -2 \qquad (3)$$

Solución:

Paso 1 Para eliminar *x* tomamos las ecuaciones (1) y (2)

Multiplicar la ecuación (1) por 2	$2(x - 2y + 3z = 4)$	$2x - 4y + 6z = 8$
Multiplicar la ecuación (2) por -1	$-1(2x + y - 4z = 3)$	$-2x - y + 4z = -3$

$$\begin{array}{r} 2x - 4y + 6z = 8 \\ -2x - y + 4z = -3 \\ \hline -5y + 10z = 5 \quad \text{(A)} \end{array}$$

Después tomamos las ecuaciones (2) y (3) para eliminar *x* también

Multiplicar la ecuación (2) por 3	$3(2x + y - 4z = 3)$	$6x + 3y - 12z = 9$
Multiplicar la ecuación (3) por 2	$2(-3x + 4y - z = -2)$	$-6x + 8y - 2z = -4$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y - 12z = 9 \\ -6x + 8y - 2z = -4 \\ \hline 11y - 14z = 5 \quad \text{(B)} \end{array}$$

Paso 2 Combinar las ecuaciones A y B para encontrar el valor de *z*

Multiplicar la ecuación (A) por 11	$11(-5y + 10z = 5)$	$-55y + 110z = 55$
Multiplicar la ecuación (B) por 5	$5(11y - 14z = 5)$	$55y - 70z = 25$

$$\begin{array}{r} -55y + 110z = 55 \\ 55y - 70z = 25 \\ \hline 40z = 80 \end{array}$$

$$z = \frac{80}{40} = 2$$

Paso 3 Sustituir el valor de z en la ecuación (A) o (B)

Escogemos la ecuación (A)

$$-5y + 10z = 5$$
$$-5y + 10(2) = 5$$
$$-5y + 20 = 5$$
$$-5y = 5 - 20$$
$$-5y = -15$$
$$y = \frac{-15}{-5} = 3$$

Paso 4 Sustituir los valores de z y y en la ecuación (1) ó (2) ó (3) para encontrar el valor de x

Escogemos la ecuación (1), y sustituimos los valores de $z = 2 \quad y = 3$

$$x - 2y + 3z = 4$$
$$x - 2(3) + 3(2) = 4$$
$$x - 6 + 6 = 4$$
$$x = 4$$

La solución del sistema es $x = 4$ $y = 3$ $z = 2$

Paso 5 Comprobación

Ecuación (1)	Ecuación (2)	Ecuación (3)
$\boldsymbol{x - 2y + 3z = 4}$	$2x + y - 4z = 3$	$-3x + 4y - z = -2$
$\mathbf{(4) - 2(3) + 3(2)}$ $\mathbf{= 4}$	$2(4) + (3) - 4(2)$ $= 3$	$-3(4) + 4(3) - (2) = -2$
$\mathbf{4 - 6 + 6 = 4}$	$8 + 3 - 8 = 3$	$-12 + 12 - 2 = -2$
$\mathbf{4 = 4}$	$3 = 3$	$-2 = -2$

b) Método de determinantes[2]

Una determinante de 3 x 3 está formada por tres renglones y tres columnas.
El modo más sencillo de hallar el valor de una determinante de tercer orden es aplicando la regla de Sarrus.

[2] Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo. (2021). Material didáctico del estudiante: Matemáticas I. Quintana Roo: COBAQROO.

Ejemplo 3

Resolver $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ por la regla de Sarrus

Para obtener el valor de la determinante:

1. Debajo de la tercera fila horizontal, vuelve a escribir las dos primeras filas horizontales. Observa cómo queda.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Traza tres diagonales de izquierda a derecha, empezando por el primer número de la primera fila; luego traza tres diagonales de derecha a izquierda, empezando con el tercer número de la primera fila. Mira cómo queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Ahora, multiplica entre sí, los tres números por los que pasa cada diagonal de izquierda a derecha y luego los sumas. Observa:

$$(1)(2)(3) + (-4)(-1)(-3) + (5)(-2)(1) = 6 + (-12) + (-10) = 6 - 12 - 10 = -16$$

4. Haz lo mismo con las diagonales de derecha a izquierda:
$$(-3)(2)(5) + (1)(-1)(1) + (3)(-2)(-4) = (-30) + (-1) + (24) = -30 - 1 + 24 = -7$$

5. Para terminar, al primer resultado réstale el segundo resultado.

$$(-16) - (-7) = -16 + 7 = -9$$

De esta manera, -9 es el valor de la determinante.

Una vez que ya sabes cómo obtener el valor de una determinante, vamos a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de determinantes.

Antes de iniciar, tienes que recordar el modelo algebraico de un sistema de 3 x 3, para que luego seas capaz de identificar los valores que vas a sustituir en las fórmulas.

Modelo algebraico:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Recuerda que las letras a, b, d y d, representan los coeficientes de las incógnitas; la a para la x, la b para la y, la c para la z y la d para el término independiente. Los números 1, 2 y 3, es para identificar la ecuación a la que pertenece.
A continuación, se te presentan las fórmulas de las determinantes que te servirán para obtener los valores de las incógnitas.

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad Dx = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad Dy = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad Dz = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Los valores de las incógnitas están dados por las expresiones:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D} \qquad z = \frac{Dz}{D}$$

Ejemplo 4

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

1) $x + y + z = 4$
2) $2x - 3y + 5z = -5$
3) $3x + 4y + 7z = 10$

Pasos:

1. **Sustituye los valores de los coeficientes en cada determinante según la fórmula y obtén el valor de cada una de ellas**. Es importante incluir los signos negativos de los coeficientes en las determinantes, observa:

$$D=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}=(-21+8+15)-(-9+20+14)=(2)-(25)=2-25=-23$$

$$Dx=\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad Dx=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \end{bmatrix}=(-84-20+50)-(-30+80-35)=(-54)-(15)=$$

$$=-54-15=-69$$

$$Dy=\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad Dy=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}=(-35+20+60)-(-15+50+56)=(45)-(91)=$$

$$=45-91=-46$$

$$Dz=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad Dz=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}=(-30+32-15)-(-36-20+20)=(-13)-(-36)=$$

$$=-13+36=23$$

2. **Sustituye los valores encontrados de las determinantes según las siguientes fórmulas.**

$$x=\frac{Dx}{D} \qquad x=\frac{-69}{-23} \qquad x=3$$

$$y=\frac{Dy}{D} \qquad y=\frac{-46}{-23} \qquad y=2$$

$$z=\frac{Dz}{D} \qquad z=\frac{23}{-23} \qquad z=-1$$

3. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1) $x+y+z=4$ $(3)+(2)+(-1)=4$ $3+2-1=4$ $4=4$	En la 2) $2x-3y+5z=-5$ $2(3)-3(2)+5(-1)=-5$ $6-6-5=-5$ $-5=-5$	En la 3) $3x+4y+7z=10$ $3(3)+4(2)+7(-1)=10$ $9+8-7=10$ $10=10$

Ejemplo 5

1) $2x + y - 3z = 12$
2) $5x - 4y + 7z = 27$
3) $10x + 3y - z = 40$

Pasos:

1. **Sustituye los valores de los coeficientes en cada determinante según la fórmula y obtén el valor de cada una de ellas**. Es importante incluir los signos negativos de los coeficientes en las determinantes, observa:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = (8 - 45 + 70) - (120 + 42 - 5) = (17) - (157) =$$

$$= 33 - 157 = -124$$

$$Dx = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} Dx = \begin{bmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \\ 40 & 3 & -1 \\ 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \end{bmatrix} = (48 - 243 + 280) - (480 + 252 - 27) = (85) - (705) =$$

$$= 85 - 705 = -620$$

$$Dy = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{bmatrix} Dy = \begin{bmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \\ 10 & 40 & -1 \\ 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \end{bmatrix} = (-54 - 600 + 840) - (-810 + 560 - 60) =$$

$$= (186) - (-310) = 186 + 310 = 496$$

$$Dz = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{bmatrix} Dz = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 5 & -4 & 27 \\ 10 & 3 & 40 \\ 2 & 1 & 12 \\ 5 & -4 & 27 \end{bmatrix} = (-320 + 180 + 270) - (-480 + 162 + 200) =$$

$$= (130) - (-118) = 130 + 118 = 248$$

2. **Sustituye los valores encontrados de las determinantes según las siguientes fórmulas.**

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad x = \frac{-620}{-124} \qquad x = 5$$

$$y = \frac{Dy}{D} \qquad y = \frac{496}{-124} \qquad y = -4$$

$$z = \frac{Dz}{D} \qquad z = \frac{248}{-124} \qquad z = -2$$

3. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1) $2x + y - 3z = 12$ $2(5) + (-4) - 3(-2) = 12$ $10 - 4 + 6 = 12$ $12 = 12$	En la 2) $5x - 4y + 7z = 27$ $5(5) - 4(-4) + 7(-2) = 27$ $25 + 16 - 14 = 27$ $27 = 27$	En la 3) $10x + 3y - z = 40$ $10(5) + 3(-4) - (-2) = 40$ $50 - 12 + 2 = 40$ $40 = 40$

Actividad 0.5

Instrucciones:

1. Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta

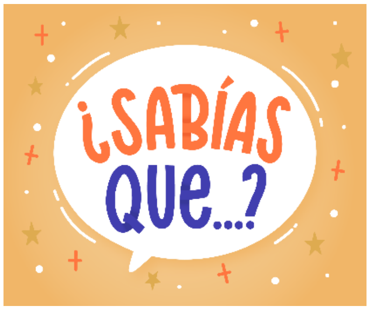
Ejercicios:

1. $-3x + 9y = 39$
   $7x - y = -11$

2. $x - y + z = 2$
   $x + y + z = 4$
   $2x + 2y - z = -4$

Evaluación:

- Para evaluar la actividad se utilizará el instrumento de evaluación 1, revisa en la parte posterior de tu cuadernillo la sección de instrumentos de evaluación.



Existe una App creada para el estudio de la geometría, cálculo, estadística y álgebra, que es totalmente gratuita y la puedes encontrar en internet, te la presento, se llama **GeoGebra**, si cuentas con tu celular la puedes descargar en tu Play Store (Android) o App Store (Apple) (*aparece como graficadora*), verás que es muy sencilla y divertida de usar. Si no la puedes descargar no te preocupes es únicamente una herramienta de apoyo que puedes utilizar para crear gráficas y comprobar los resultados de tus ejercicios, la entrega de las actividades no dependerá de su uso y aplicación. Observa el **Anexo 1** al final de este material didáctico, el cual contiene información relevante para su descarga.

BLOQUE I. Lugares geométricos en el plano

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Usa los conceptos básicos de la Geometría Analítica promoviendo el pensamiento reflexivo y lógico como una nueva forma de interpretar su entorno espacial; contribuyendo a la construcción de nuevos conocimientos que aplique en su vida cotidiana. / Emplea el cálculo de perímetros y áreas en el plano cartesiano para resolver creativamente, problemáticas de su contexto
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Lugar geométrico de líneas rectas y curvas/ Sistemas de Coordenadas rectangulares

Lectura Previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Vamos a iniciar este bloque analizando la diferencia entre la geometría que estamos acostumbrados a usar, con una nueva geometría llamada **geometría analítica** que es sumamente muy importante en el campo de las matemáticas y que en este curso has estado trabajando en los bloques anteriores, te presento el significado de cada uno de ellos.

Geometría Plana y Geometría Analítica

La **geometría plana** comprende el estudio de figuras como rectas, círculos y triángulos, que se encuentran en un plano. Los teoremas se demuestran de manera ***deductiva*** por razonamiento a partir de determinados postulados.

En **geometría analítica**, las figuras geométricas planas se estudian mediante el uso de sistemas coordenados y de ecuaciones y fórmulas. Si el estudio de la geometría analítica se resumiera por medio de un enunciado, quizá el siguiente sería el mejor: ***dada una ecuación, encuentra su gráfica y, al revés, dada una gráfica, encuentra su ecuación***.

El precursor de la geometría analítica y creador del plano cartesiano, fue el filósofo y matemático francés **René Descartes *(1596-1650).*** Nació en 1596. Entre sus principales aportes a la filosofía está su famoso ***discurso del método***. Descartes afirmo que los orígenes de esta obra filosófica estaban en la lógica, la geometría y el algebra. Por otra parte, este pensador ilustre hizo una importante contribución a las matemáticas. Al ***discurso del método*** le añadió un anexo titulado **Geometría**, en el cual propuso un sistema nuevo para estudiar esta disciplina. Gracias al ***"sistema de coordenadas cartesianas"*** creado por Descartes y denominado así en su honor, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores. Este sistema permite asignar a cada punto del plano una pareja de números reales que lo identifica, inequívocamente. Así, cualquier figura geométrica puede ser identificada con un conjunto de parejas de números reales.

Lugar geométrico de líneas rectas y curvas sistemas de coordenadas rectangulares

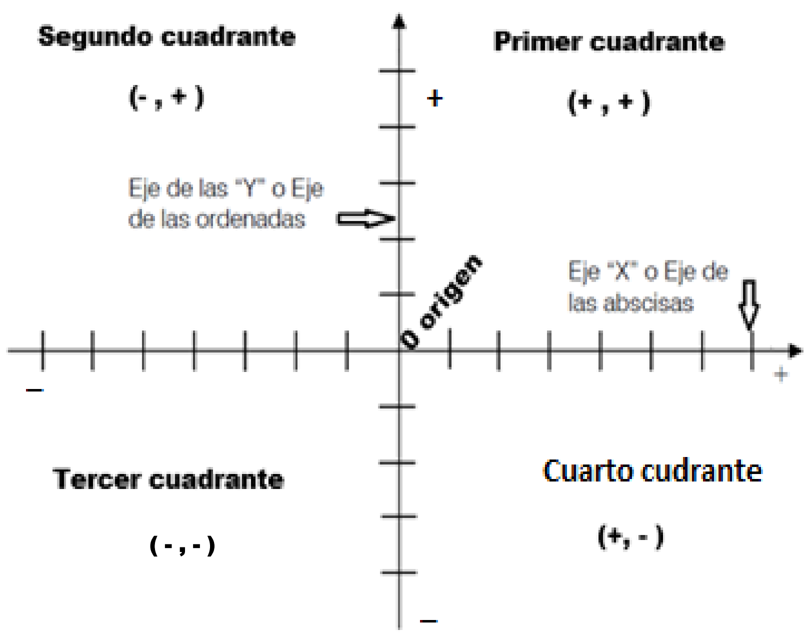
Se llama ***sistema de coordenadas rectangulares*** (o cartesianas) al que formamos en un plano mediante dos rectas perpendiculares graduadas, llamadas ejes de coordenadas, que se cruzan en el origen O.

Normalmente nos referimos a la recta horizontal como **eje X** y a la vertical como **eje Y**. El plano es entonces un plano de coordenadas, o plano XY. Los ejes dividen el plano en cuatro partes denominadas primero, segundo, tercero y cuarto **cuadrantes**, marcados como I, II, III y IV, respectivamente. Los puntos sobre los ejes no pertenecen a ningún cuadrante.

Plano cartesiano

Está formado por dos líneas perpendiculares, llamadas **ejes coordenados,** cuyo punto de intersección se denomina **origen.** A la línea horizontal se le denomina **eje x** o de las **abscisas**, y a la línea vertical, **eje y** o de las **ordenadas**.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, los cuales se enumeran, como se muestra en la figura 4.



Lugares geométricos

Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad, por ejemplo, el lugar geométrico de todos los puntos que representa la expresión algebraica $\boldsymbol{y = x + 3}$, es una línea recta, inclinada hacia la derecha y tres unidades arriba del origen.

También hay que tomar en cuenta que los lugares geométricos pueden estar representados por otro tipo de figuras geométricas como son: de tipo parabólico, circular y elíptica.

Nota: Para poder entender los lugares geométricos es importante entender cómo localizar una pareja ordenada en el plano cartesiano

Por ejemplo, para localizar el punto (3,1), (fig. de la derecha), procederemos de la siguiente manera:

Paso 1. Señalaremos primero el punto 3 sobre el **eje x,** que está a tres unidades a la derecha del origen.

Paso 2. A partir del 3, sobre una paralela al **eje y,** mediremos una unidad hacia arriba del eje x, obteniendo así el punto (3,1).

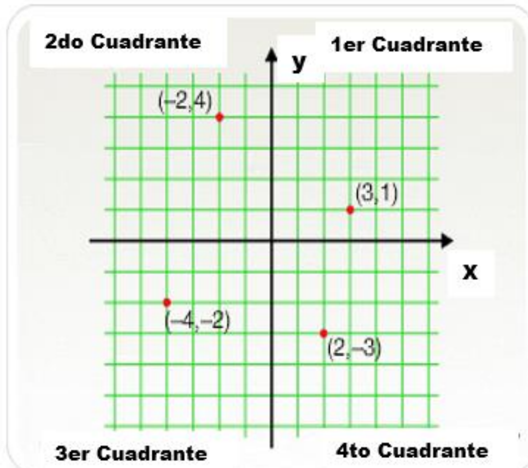


Figura 5

Los puntos formados por (x, y) también son conocidos como pares ordenados y me sirven como coordenadas para ubicar un punto en el plano.

Ejemplo 1

A continuación, se proporcionan ejemplos de cómo ubicar parejas ordenadas en el plano cartesiano.

Pareja ordenada está formado por (x, y) primero se recorre en la gráfica hacia el eje "x" positivo o negativo según el signo del número y luego hacia el eje "y" también según el signo del número.

- El punto A (4, -1) primero se desplaza 4 unidades en el sentido positivo del eje x a partir del origen y después 1 unidad hacia abajo por tener signo negativo.
- El punto B (4, -2) primero se desplaza 4 unidades en el sentido positivo del eje x a partir del origen y después 2 unidades hacia abajo por tener signo negativo.
- El punto C (1, -2) Primero se desplaza 1 unidades en el sentido positivo del eje x a partir del origen y después – 2 unidades hacia abajo por tener sigo negativo.
- El punto D (0, -1) primero 0 desplazamiento en el eje "x" pero se debe desplazar 1 unidad hacia abajo por tener signo negativo.

- El punto F (-1, -2) primero se desplaza 1 unidad hacia la izquierda del eje "x" por tener signo negativo y 2 unidades hacia abajo en el eje "y" por tener signo negativo.

Y así sucesivamente con los siguientes puntos. Al unir los puntos con segmentos de rectas en orden alfabético se debe formar la figura de una bota.

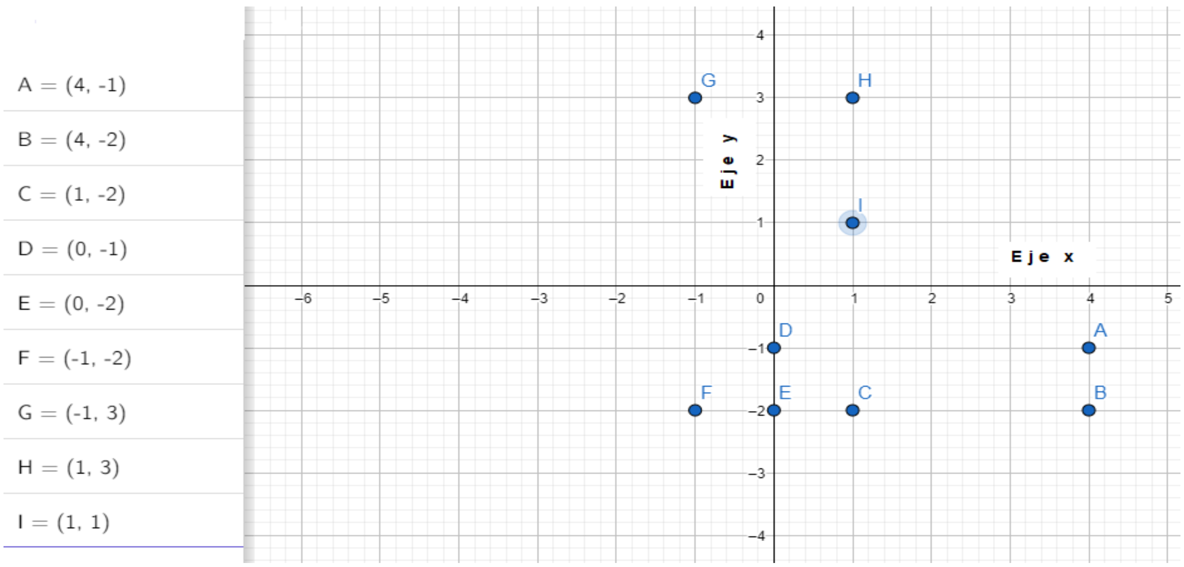


Figura 6

Ejemplo 2

La ecuación $y = (x+2)^2$ *tiene como lugar geométrico la siguiente gráfica.*

x	$y = (x+2)^2$	(x, y)
-3	$y = (-3+2)^2 = 1$	(-3, 1)
-2	$y = (-2+2)^2 = 0$	(-2, 0)
-1	$y = (-1+2)^2 = 1$	(-1, 1)
0	$y = (0+2)^2 = 4$	(0, 4)
1	$y = (1+2)^2 = 9$	(1, 9)
2	$y = (2+2)^2 = 16$	(2, 16)
3	$y = (3+2)^2 = 25$	(3, 25)

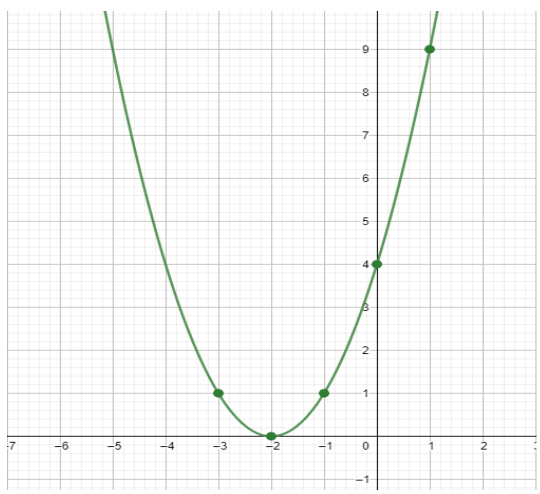


Figura 7

Ejemplo 3

La ecuación lineal $y = x + 2$ tiene como lugar geométrico la siguiente gráfica

x	$y = x + 2$	(x, y)
-3	$y = -3 + 2 = -1$	(-3,-1)
-2	$y = -2 + 2 = 0$	(-2, 0)
-1	$y = -1 + 2 = 1$	(-1, 1)
0	$y = 0 + 2 = 2$	(0, 2)
1	$y = 1 + 2 = 3$	(1, 3)
2	$y = 2 + 2 = 4$	(2, 4)
3	$y = 3 + 2 = 5$	(3, 5)

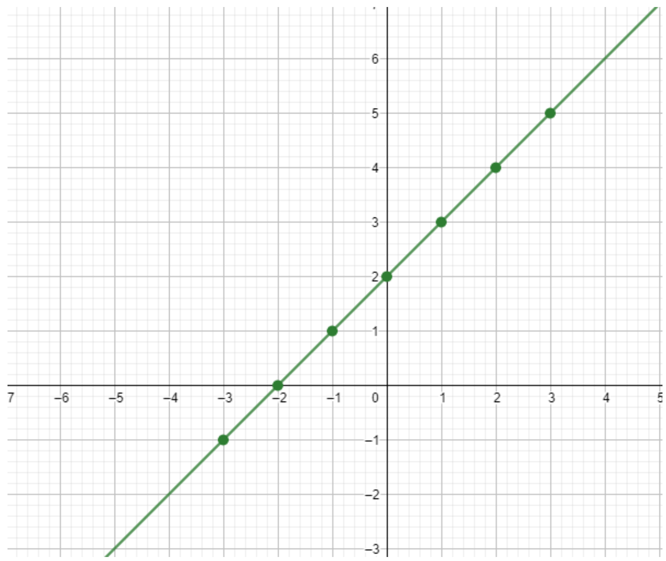


Figura 8

Ejemplo 4

Identifica las coordenadas de la siguiente gráfica. En la derecha se ponen las coordenadas que forman los puntos del triángulo. Se le asigna el valor de A para tenerlo de referencia.

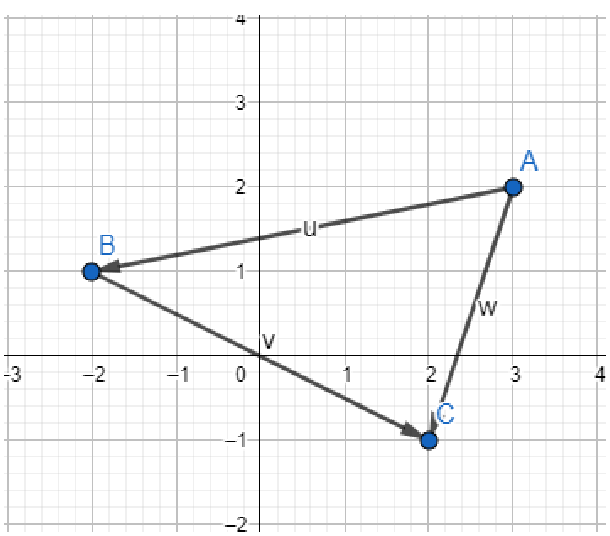


Figura 9

A (3, 2), B (   ), C (   )

Actividad 1.1

Sistema de coordenadas

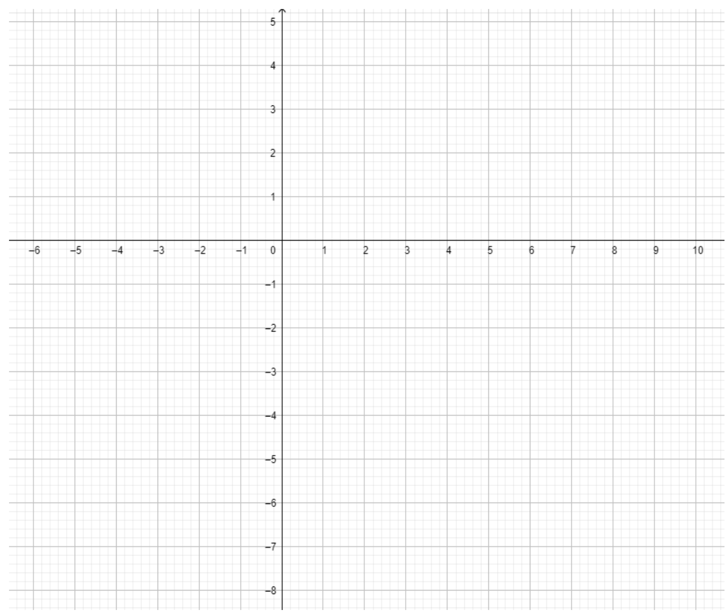
Instrucciones:

1. Copia en tu libreta cada uno de los ejercicios propuestos y resuelve según lo que se te solicite.
2. Si tienes la posibilidad, utiliza el software Geogebra para comprobar tus respuestas (ver **Anexo 1**)

Ejercicios

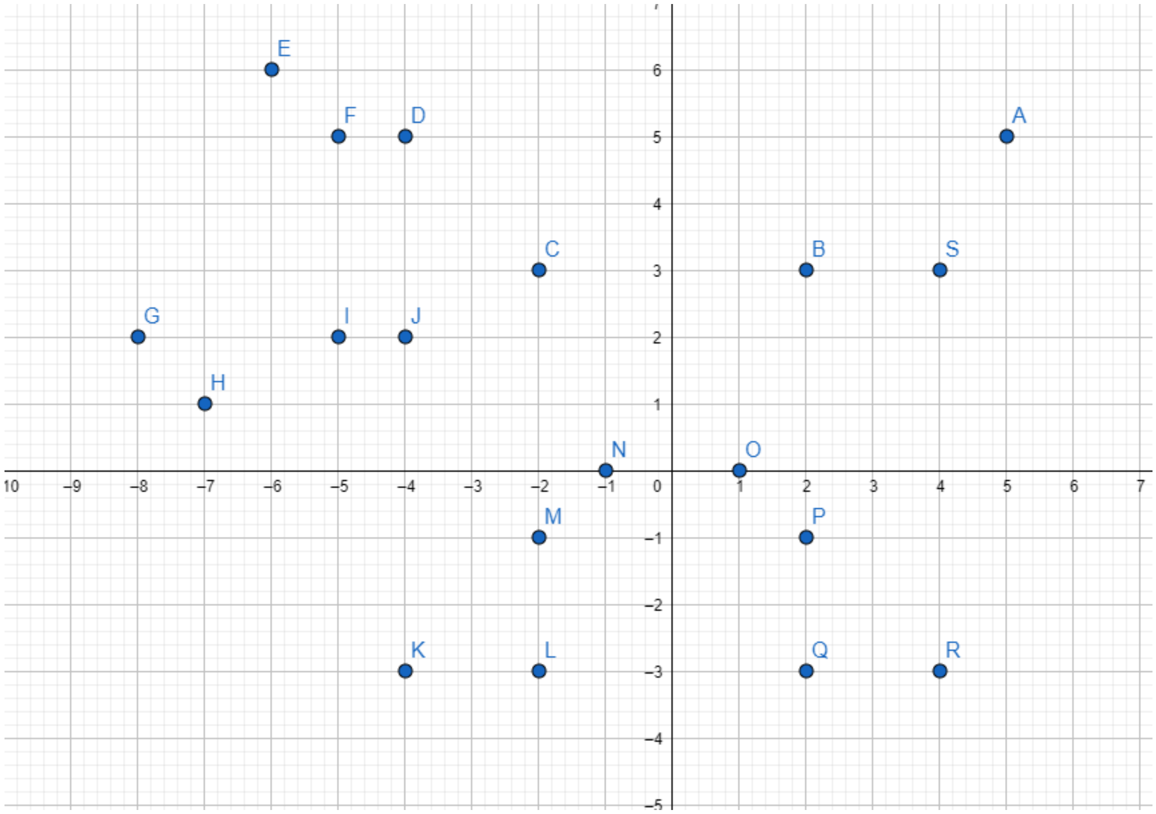
1. Localiza los puntos en el plano cartesiano y una vez ubicado correctamente une cuidadosamente los puntos de acuerdo al orden alfabético y descubre la figura que se forma:

A (8, -1)	**I (-4, -1)**
B (6, 2)	**J (-4, -7)**
C (4, 2)	**K (0, -7)**
D (4, 4)	**L (0, -4)**
E (1, 4)	**M (2, -4)**
F (1, 2)	**N (2, -7)**
G (-4, 2)	**O (6, -7)**
H (-6, -1)	**P (6, -1)**



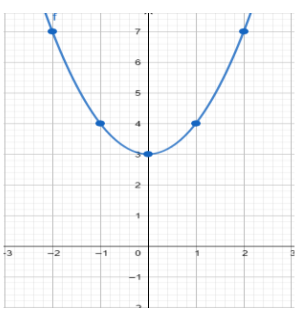
2. Obtén las coordenadas de los puntos que aparecen en el plano cartesiano. Une los puntos de acuerdo al orden alfabético

A ( )	**F ( )**	**K ( )**	***P* ( )**
B ( )	**G ( )**	**L ( )**	***Q* ( )**
C ( )	**H ( )**	**M ( )**	**R ( )**
D( )	**I ( )**	**N ( )**	**S ( )**
E ( )	**J ( )**	**O ( )**	

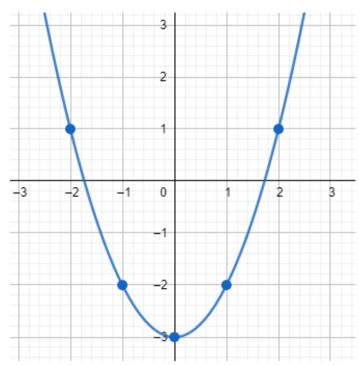


3. Identifica el lugar geométrico de la siguiente ecuación $y = x^2 + 3$. <u>Apóyate haciendo la tabla de valores correspondientes.</u>

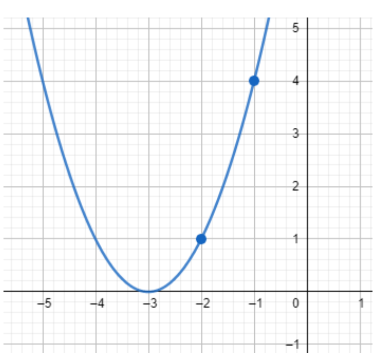
a)



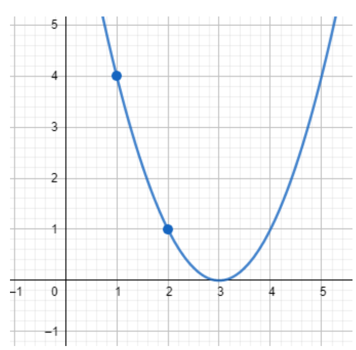
b)



c)

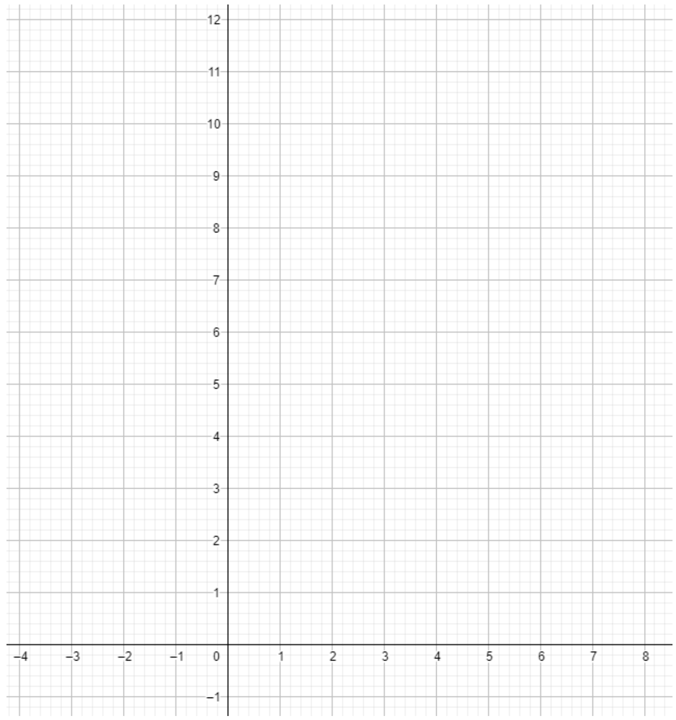


d)



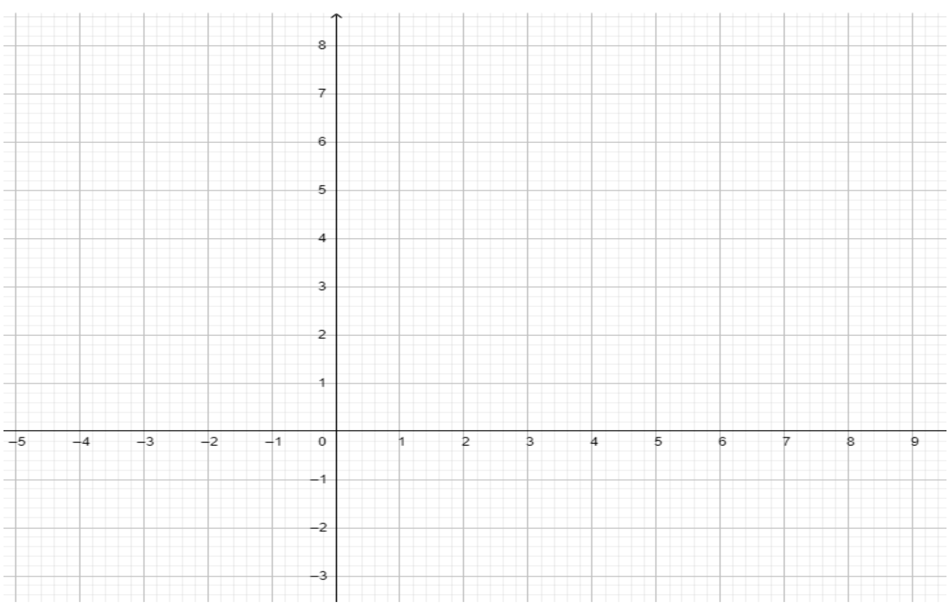
4.- Con los datos proporcionados en la tabla, grafícalos en el plano cartesiano

x	f(x)
-2	-8
-1	0
0	6
1	10
2	12
3	12
4	10
5	6
6	0



5.- Grafica en un mismo plano cartesiano las siguientes parejas ordenadas. Utiliza para cada inciso un color distinto.

A) (3, 4) ; (-2, 5) ;(-3,-2) ; (5,-3)
B) (-4, 2); (-2, 3); (1, -6); (0, 4)
C) (5,-2) ; (0,5) ; (3,2) ; (-1,0) ; (7,6)



Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 2

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Usa los conceptos básicos de la Geometría Analítica promoviendo el pensamiento reflexivo y lógico como una nueva forma de interpretar su entorno espacial; contribuyendo a la construcción de nuevos conocimientos que aplique en su vida cotidiana.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Segmentos rectilíneos / Distancia entre dos puntos/ División de un segmento en una razón dada.

Lectura previa

◉ Conceptos básicos sobre rectas, segmentos

Segmentos rectilíneos

Segmento rectilíneo o simplemente segmento, es la porción de recta comprendida entre dos de sus puntos que se llaman extremos, o bien uno origen y otro extremo. Los extremos de un segmento forman parte del mismo. Un segmento de extremos A y B se designa AB.

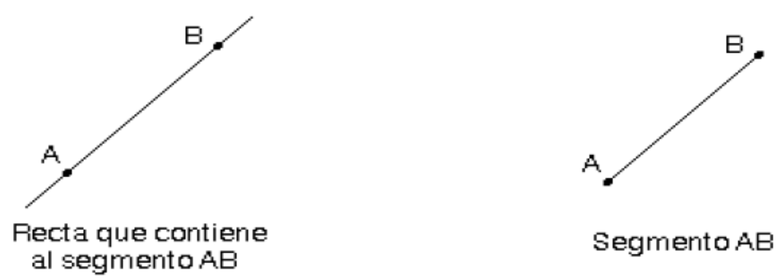


Figura 10

Cuando a los puntos de un segmento se les indica un orden (por ejemplo, desde A hacia B) donde A es el punto inicial y B el punto final se conoce como <u>segmento de recta dirigido</u> AB

Figura 11

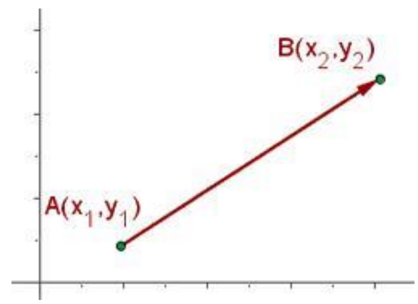
La longitud de un segmento dirigido se considera positiva, si su signo es positivo en su notación (AB) y el sentido opuesto será de longitud negativa (BA). Es decir, si la longitud de AB es positiva entonces BA tendrá que ser negativa: AB = -BA

El segmento no dirigido es aquella porción de recta denotada por AB, donde únicamente se considera su tamaño (longitud) sin importar su dirección o sentido.

Segmento	Interpretación gráfica	Notación	Equivalencia
No dirigido	A ●———● B	$\overline{AB}$ o $\overline{BA}$	$\overline{AB} = \overline{BA}$
Dirigido	A ●———▶ B	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
Dirigido	A ◀———● B	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Figura 12 tomada del libro de Matemáticas III del Colegio de Bachilleres de Sonora cuarta edición 2009.

I. *Distancia entre dos puntos*



La distancia entre dos puntos ubicados en un sistema coordenado rectangular se determina por la longitud del segmento que los une. Supongamos que A($x1$, $y1$) y B($x2$, $y2$) son dos puntos situados en el plano como se muestran en la figura:

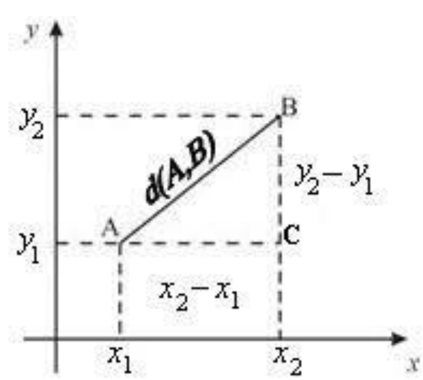
La distancia que hay entre estos dos puntos se determina a través da la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distancia entre dos puntos algunas veces la denotaremos mediante la letra d minúscula y otras veces mediante la expresión d(AB), donde se indican entre paréntesis los puntos a los cuales se les calcula su distancia. Esta notación es ideal cuando se involucran cálculos de distancias entre otros puntos en un mismo plano.

¿De dónde se deduce esta fórmula?

Del Teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$), donde la distancia está representada por la hipotenusa del triángulo formado por la diferencia de las coordenadas en **x** y en **y** (que representan los catetos).



Ejemplo 1

Determina la distancia entre los pares de puntos: ***A (3, - 5), B (- 2, 4)***.

Solución:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-2-3)^2 + (4-(-5))^2}$

$d = \sqrt{(-2-3)^2 + (4+5)^2}$

$d = \sqrt{(-5)^2 + (9)^2}$

$d = \sqrt{25+81}$

$d = \sqrt{106}$ =10.29 u

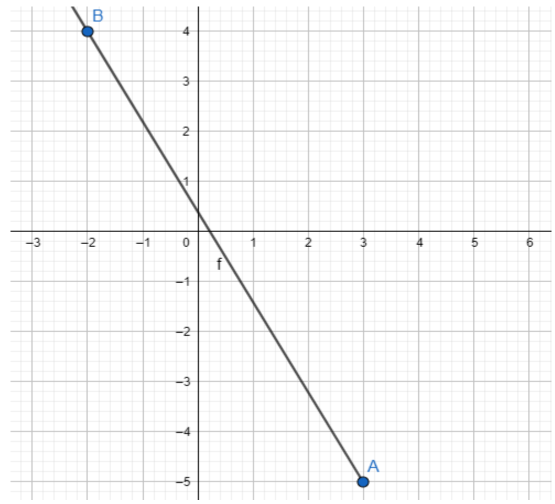


Figura 16

La distancia que hay entre los puntos es de 10.29 unidades lineales.

Ejemplo 2

Los puntos A (1, 0), B (3, 4) y C (4, 2) proporcionados corresponden a los vértices de un triángulo. Utilizando el concepto de distancia entre dos puntos determina si es un triángulo:

a) Si las tres distancias son iguales entonces es un triángulo Equilátero
b) Si dos distancias son iguales entonces es un triángulo Isósceles
c) Si las tres distancias son distintas entonces es un triángulo Escaleno.

Solución:

$dAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$dAB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2}$
$dAB = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$
$dAB = \sqrt{(4+16}$
$dAB = \sqrt{20}$

$dBC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$dBC = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2}$
$dBC = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$
$dBC = \sqrt{1+4}$
$dBC = \sqrt{5}$

$dAC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$dAC = \sqrt{(4-1)^2 + (2-0)^2}$
$dAC = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$
$dAC = \sqrt{(9+4}$
$dAC = \sqrt{13}$

De acuerdo a los resultados obtenidos de la distancia entre los puntos de los vértices del triángulo se puede determinar que los tres son diferentes, por lo tanto, corresponde a un triángulo escaleno.

Compruébalo gráficamente.

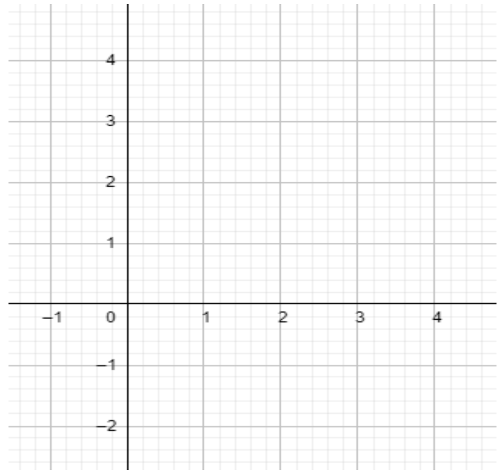


Figura 17

II. *Puntos colineales*

Si tres puntos o más pertenecen a una misma recta, entonces estos puntos son colineales. Para saber si los puntos son colineales debemos comprobar que:

dAB + dBC = dAC

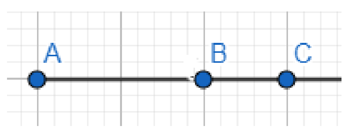


Figura 14

Ejemplo 3

Demuestra por medio del concepto de distancia entre dos puntos y con la gráfica, que los puntos A(-2, -4), B(0, -2) y C(3, 1) son colineales.

<u>Solución:</u>

Obtención de las distancias:

$$dAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$dAB = \sqrt{(0+2)^2 + (-2+4)^2}$$
$$dAB = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$
$$dAB = \sqrt{(4+4}$$
$$dAB = \sqrt{8} = 2.83$$

$$dBC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$dBC = \sqrt{(3-0)^2 + (1+2)^2}$$
$$dBC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$
$$dBC = \sqrt{9+9}$$
$$dBC = \sqrt{18}{=}4.24$$

$$dAC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$dAC = \sqrt{(3+2)^2 + (1+4)^2}$$
$$dAC = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$
$$dAC = \sqrt{(25+25}$$
$$dAC = \sqrt{50}{=}7.07$$

Comprobando si son colineales

dAB + dBC = dAC

2.83 + 4.24 = 7.07

7.07 = 7.07

Entonces los puntos A, B, C si son colineales. También se puede apreciar en la gráfica

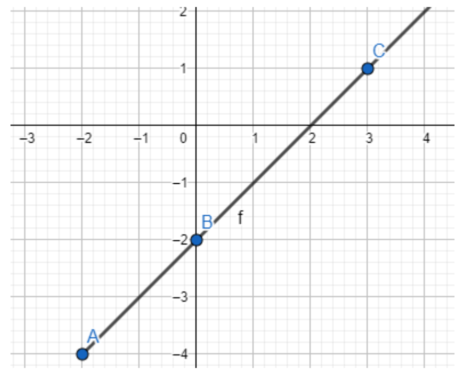


Figura 18

Ejemplo 4

Utilizando el concepto de distancia entre dos puntos hallar el valor de la incógnita ***A*** *(0, 4)* ***B*** *(5, y);* ***dAB=*** *13 que hace falta en uno de los puntos dados.*

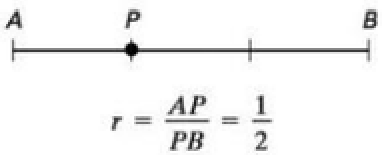
Solución:

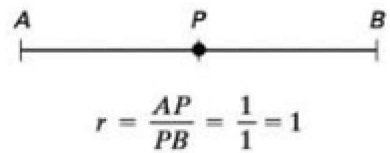
Procedimiento:

Fórmula de distancia entre dos puntos	$dAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Se sustituye con los datos conocidos	$13 = \sqrt{(5-0)^2 + (y_2 - 4)^2}$
Se elimina la radical elevando al cuadrado ambos miembros	$(13)^2 = (5-0)^2 + (y_2 - 4)^2$ $169 = (5-0)^2 + (y_2 - 4)^2$
Se pasa el 25 del lado de 169 con el signo invertido y se realiza la operación quedando del lado izquierdo 144 y del lado derecho el binomio al cuadrado.	$169 = 25 + (y_2 - 4)^2$ $169 - 25 = (y_2 - 4)^2$ $144 = (y_2 - 4)^2$
Se les saca la raíz cuadrada a ambos miembros para eliminar el cuadrado del binomio y de esta forma dejarlo en forma lineal.	$\pm\sqrt{144} = (y_2 - 4)$ $\pm 12 = y_2 - 4$
Posteriormente se hace el despeje de la incógnita "y" y de ella obtener dos valores posibles ±	$12 + 4 = y_2$ $16 = y_1 \quad Respuesta\ 1$
En este caso se obtiene los siguientes valores (5, y) = (5, 16) 0 (5, -8)	$-12 + 4 = y_2$ $-8 = y_2 \quad Respuesta\ 2$

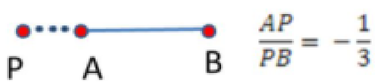
III. *División de un segmento en una razón dada*

El resultado de la comparación de dos cantidades de la misma especie, se llama razón o relación de dichas cantidades.





Observación: En geometría analítica las razones deben considerarse con su signo o sentido porque se trata de segmentos de recta dirigidos. Si la razón es positiva, el punto está dentro del segmento, si la razón es negativa el punto está fuera del segmento.



<u>Demostración matemática</u>.

Como puede observarse, se han formado dos triángulos semejantes de donde se puede establecer la siguiente relación:

$\frac{\text{AP}}{\text{PB}} = \frac{\text{AQ}}{\text{PO}} = \text{r}$, es decir:

$\frac{AP}{PB} = \frac{X - X_1}{X_2 - X} = r$

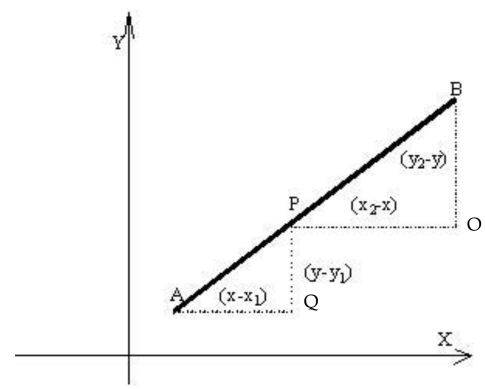


Figura 19

De donde:
$x - x_1 = r(x_2 - x)$
$x - x_1 = rx_2 - rx$
$x + rx = x_1 + rx_2$ $factorizando$
$x(1 + r) = x_1 + rx_2$ $Despejando$

Fórmulas para hallar las coordenadas del punto razón

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}} \qquad \boldsymbol{y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}}$$

Ejemplo 5

Hallar las coordenadas del punto ***P*** *(x, y) que divide al segmento cuyos extremos son los puntos* ***A*** *(1, 1) y* ***B*** *(11, 6) en una razón tal que:* $r = \frac{2}{3}$

Solución:

De acuerdo a la relación planteada, se pueden aplicar las fórmulas obtenidas:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)(11)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{1 + \frac{22}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{75}{15} = 5$$

De manera similar para y:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)(6)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$y = \frac{1 + 4}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto razón buscado son P (5, 3).

Cómo hallar razón “r” de un segmento si sus coordenadas ya se conocen

Fórmula para hallar la razón cuando ya se conoce las coordenadas del punto razón

$$\mathbf{\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PO} = \frac{PQ}{BO} = r}$$

Es decir:

$\boldsymbol{r = \frac{X - X_1}{X_2 - X}}$	$\boldsymbol{r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}}$

Se puede utilizar cualquiera de las dos fórmulas para encontrar la razón, siempre y cuando la recta esté inclinada y el punto esté dentro del segmento. Si la recta es vertical sólo se considera la fórmula sustituyendo la variable “y” (relación con el lado vertical) y si es horizontal sólo se considera la fórmula sustituyendo la variable “x” (relación con el lado horizontal).

Ejemplo 6

Hallar la razón del segmento recta A (1, 1) B (11, 6) cuando ya se conoce las coordenadas del punto razón P (5, 3).

Solución:

Aplicando cualquiera de las dos fórmulas siguientes es muy sencilla de obtener

Para valores de x	Para valores de y
$$\frac{AP}{PB}=\frac{X-X_1}{X_2-X}=r$$ **Paso 1**. Sustituir con los datos conocidos $$r=\frac{5-1}{11-5}$$ **Paso 2.** Resolver la operación $$r=\frac{4}{6}$$ Simplificado es igual $$r=\frac{2}{3}$$	$$\frac{AP}{PB}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$ **Paso 1.** Sustituir con los datos conocidos $$r=\frac{3-1}{6-3}$$ **Paso 2**. Resolver la operación $$r=\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la razón es de 2 a 3 como también se puede apreciar en la gráfica

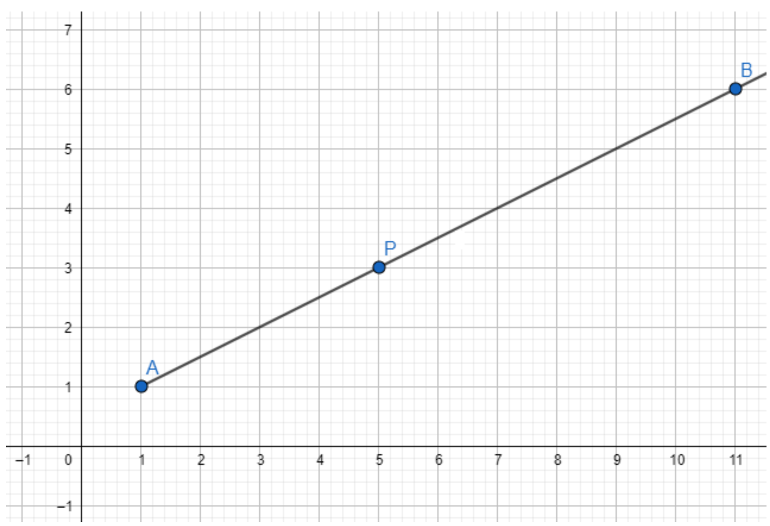


Figura 20

IV. Punto medio

El punto medio es un caso particular de la división de un segmento en una razón dada, en la cual r = 1. De acuerdo con ello, se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boldsymbol{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Ejemplo 7

Obtener el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A (3, −2) y B (-5, 4).

Solución:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo que las coordenadas del punto medio son: (-1, 1).

Actividad 1.2

Conceptos básicos sobre rectas, segmentos

Instrucciones:

1. Copia en tu libreta cada uno de los ejercicios propuestos y resuelve según lo que se te solicite

Ejercicios

1. Encuentra la distancia entre cada par de puntos. Grafica cada uno de los ejercicios en el plano cartesiano

   a) A (2, 1) y B (7, 2) b) C (-4, 4) y D (4, 4)

   c) E (-8, -5) y F (-3, -5) d) G (0, -2) y H (7, -2)

2. Determina la coordenada faltante en cada caso
   a) A (0,4); B (5, y) dAB =13
   b) A (-5, -4); B (10, y) dAB =17

3. Demostrar que los puntos A, B y C son colineales

   a) A (-7, -1), *B* (-3,2), *C* (5, 8)

   b) A (-2, 5), *B* (1, 4), C (7, 2)

   c) A (5, -2), B (0, 0), C (-5, 2)

4. Enseguida determina las coordenadas del punto P(x, y) que divida al segmento en la razón señalada:
   a) P_1 (4, -2), P_2 (-5, 3), r = 1/4
   b) P_1 (-1, 8), P_2 (7, 10), r = 3/2

5. Determina la razón "r" dado los siguientes valores del segmento
   a) $P_1(1, 5)$; $P_2(2, 7)$ $P\left(\frac{7}{5}, \frac{29}{5}\right)$

   b) $P_1(2, 5)$; $P_2(2, 7)$ $P\left(2, \frac{11}{2}\right)$

6. Halla las coordenadas del punto medio M de los segmentos determinados por cada uno de los pares de puntos:

   a) A (0, 4) y B (0, 8)

   b) A (2, 4) y B (6, 8)

   c) A (0, 0) y B (12, 6)

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 3

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea el cálculo de perímetros y áreas en el plano cartesiano para resolver creativamente, problemáticas de su contexto
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Perímetros y áreas de figuras en el plano.

Lectura previa

Perímetros y áreas de Polígonos.

Un ***Polígono***, es una figura plana y cerrada formada por tres o más segmentos de línea unidos en sus extremos.

I. Perímetro.

Para conocer el ***perímetro*** de un polígono cualquiera debemos medir y sumar las longitudes de sus lados. Si no tenemos las longitudes de los lados, pero tenemos las coordenadas de los vértices, podemos auxiliarnos de la fórmula de distancia entre dos puntos para conocer dichas longitudes.

Ejemplo 1

Pedro desea saber cuánto tiene de perímetro, un terreno que tiene forma de polígono irregular que heredó de su padre, tiene la ventaja que conoce las coordenadas que a continuación se mencionan A (0, 1), B (0, 4) C (3, 7) y D (5, 3).

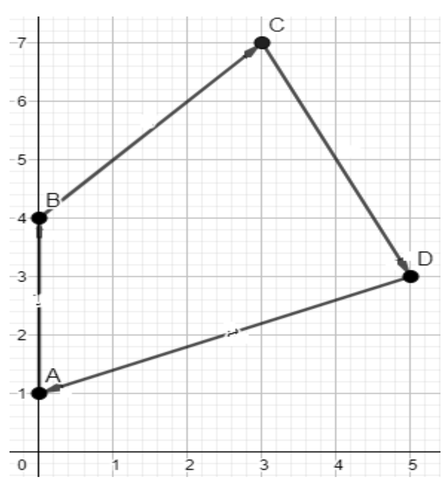


Figura 21

Solución:

Distancia AB. A (0, 1), B (0, 4)	Distancia BC. B (0, 4) C (3, 7)	Distancia CD C (3, 7) y D (5, 3)
$dAB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $dAB = \sqrt{(0-0)^2 + (4-1)^2}$ $dAB = \sqrt{(0)^2 + (3)^2}$ $dAB = \sqrt{(0+9}$ $dAB = \sqrt{9} = 3$	$dBC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $dBC = \sqrt{(3-0)^2 + (7-4)^2}$ $dBC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$ $dBC = \sqrt{9+9}$ $dBC = \sqrt{18} = 4.2$	$dCD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $dCD = \sqrt{(5-3)^2 + (3-7)^2}$ $dCD = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$ $dCD = \sqrt{(4+16}$ $dCD = \sqrt{20} = 4.5$

Distancia AD. A (0, 1) D (5, 3)
$dAD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $dAD = \sqrt{(5-0)^2 + (3-1)^2}$ $dAD = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$ $dAD = \sqrt{25+4}$ $dAD = \sqrt{29} = 5.4$

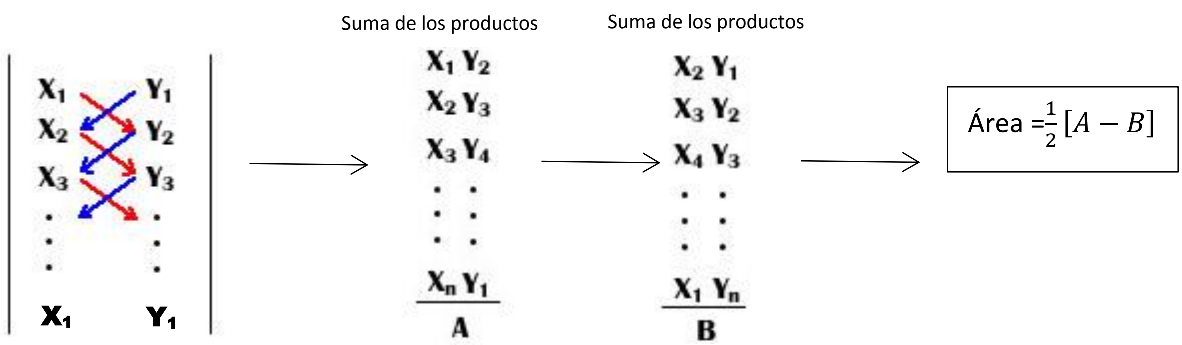
El **perímetro** del terreno es : P = dAB + dBC + dCD + dAD = 3 + 4.2 + 4.5 + 5.4 = 17.1 u

II. Área.

Para calcular el área de un polígono, se puede aplicar la fórmula de Herón, la Regla de Sarrus y Triangulación. En esta sección nos enfocaremos en la Regla de Sarrus.

REGLA DE SARRUS

Se utiliza para determinar el área de un polígono utilizando las coordenadas de sus vértices.



Expresada de forma lineal sería:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \cdots + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + \cdots + x_1y_n)]}$$

Ejemplo 2

Pedro desea saber cuánto tiene de área, un terreno que tiene forma de polígono irregular que heredó de su padre, tiene la ventaja que conoce las coordenadas que a continuación se mencionan A (0, 1), B (0, 4) C (3, 7) y D (5, 3)

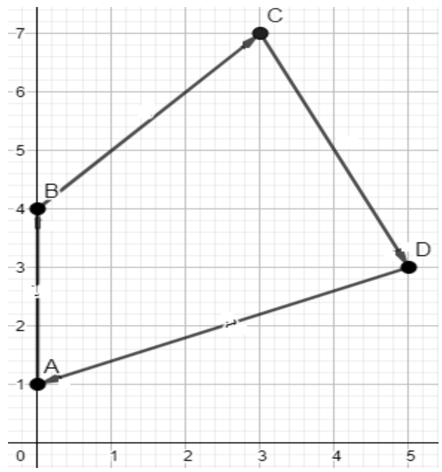


Figura 22

Conociendo los vértices del polígono se procede a acomodarlos en una determinante.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}[(0+0+9+5) - (0+35+12+0)] \\ &= \tfrac{1}{2}[(14) - (47)] = \tfrac{1}{2}[14 - 47] \\ &= \tfrac{1}{2}[-33] = \tfrac{-33}{2} = |-16.5| = 16.5u^2 \end{aligned}$$

Se acomoda los vértices dentro de la determinante y se repite siempre el primer vértice al final de la determinante como se ve en el ejemplo el punto A (0, 1). Se multiplica en forma cruzada empezando en la parte superior (0 x 4) = 0, (0 x 7) = 0, (3 x 3) = 9, (5 x 1) = 5 posteriormente se multiplica de abajo hacia arriba (0 x 3) = 0, (5 x 7) = 35, (3 x 4) = 12 (0 x 1) = 0

Actividad 1.3

Perímetro y área de polígonos

Instrucciones:

1. Copia en tu libreta y resuelve según lo que se te solicite en cada uno de los siguientes ejercicios, muy importante hacer el procedimiento de cada uno de ellos.

Ejercicios

1.- Calcula el perímetro y área de los polígonos, en función de las coordenadas de sus vértices; trace la gráfica en el plano cartesiano para auxiliarte visualmente.

a) A (-2, -4), B (3, -2), C (5, -1), D (1, 6), E (-3, 4).

b) A (-2, -4), B (6, -2), C (7, 4), D (-8, 2)

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 4

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE II. Línea recta

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Calcula la pendiente, el ángulo de inclinación y el ángulo entre dos rectas, promoviendo la creación de nuevos conocimientos que favorezca la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas en su entorno.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** razón de cambio / pendiente / condiciones de paralelismo y perpendicularidad / ángulo entre dos rectas

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Lugar geométrico de la línea recta

Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos contenidos en el plano tales que, tomados dos puntos cualesquiera de la recta $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, el valor de la pendiente (m) , es siempre constante.

Razón de Cambio.

Una razón de cambio como su nombre lo indica es el cambio ya sea positivo o negativo en unidades de como una función (ecuación) se va modificando.

Otra manera de comprender la razón de cambio es imaginarnos cuando vamos subiendo unas escaleras.

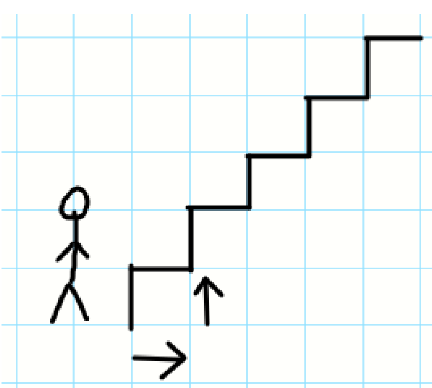


Figura 24

Cuando subimos las escaleras debemos considerar que al pisar el primer escalón estamos avanzando x unidades hacia una dirección, pero de igual forma estamos subiendo y unidades.

De eso podríamos decir que estamos avanzando a una razón de $y : x$ o $\frac{y}{x}$.

Sin embargo, ¿qué sucedería si los escalones son más altos o más largos?, ¿se modificaría la razón de cambio?

Imaginemos que usamos como unidad de medida los bloques con los que construimos las escaleras, entonces supongamos que cada escalón tiene de tamaño un bloque de alto y dos bloques de altura.

Cada vez que subimos un escalón estamos avanzando dos bloques y subiendo uno.

En la siguiente imagen podemos apreciar este avance como si estuviéramos en un plano cartesiano, donde podemos concluir que por cada escalón estamos cambiando nuestra posición en $\frac{1}{2}$, en pocas palabras estamos avanzando en una razón de cambio de $\frac{1}{2}$.

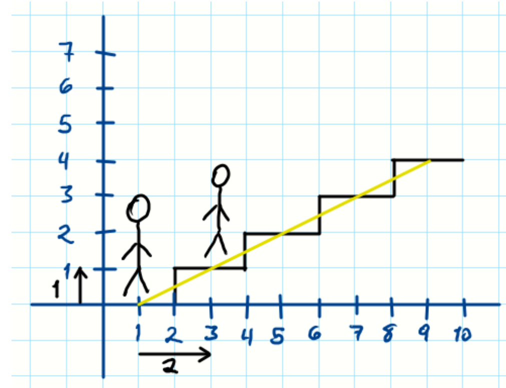


Figura 25

Por lo tanto, avanzamos más de lo que subimos.

Pendiente y razón de cambio.

En una gráfica lineal, la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta. Es decir, el cociente obtenido al dividir el incremento en el eje "y" entre el incremento en el eje "x". Y así como la pendiente de una recta es constante, su razón de cambio también lo es.

En matemáticas denotamos a la pendiente con la letra m.

Para poder desarrollar la ecuación de la pendiente debemos comprender que es esa diferencia que hay entre los puntos **P1** y **P2**, pero debemos de considerar que todo punto **P** en el plano cartesiano está constituido por unas coordenadas x y y, concluyendo entonces que: $P_1(x_1, y_1)$ $\quad y \quad$ $P_2(x_2, y_2)$

Entonces para saber el valor que adquiere la pendiente necesitamos saber cuánto es lo que cambia de un punto a otro, por lo tanto, lo que debemos hacer es saber cuánto espacio hay entre cada coordenada, y para poder descubrir ese valor lo que vamos a realizar es restar de esta forma las coordenadas:

$$y_2 - y_1 \qquad y \qquad x_2 - x_1$$

Y como en el ejemplo de las escaleras en la razón de cambio, sabemos que la distancia entre **P1** y **P2** están en una razón de cambio comprendida entre x y y, obtenemos la siguiente ecuación para la pendiente:

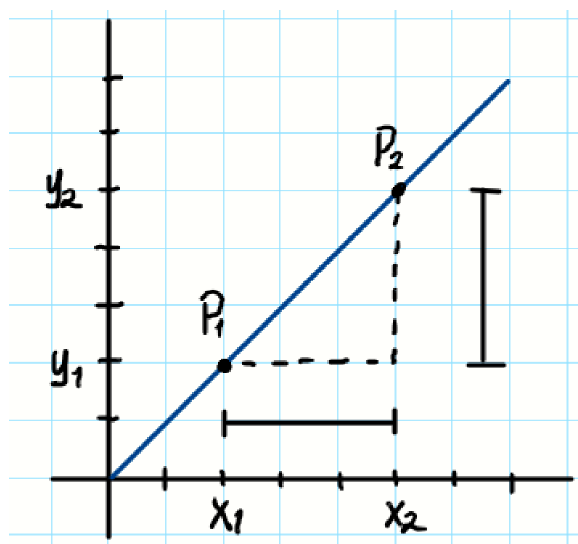


Figura 27

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo

*Si en una recta que pasa por los puntos **P1(3, 2)** y **P2(6, 4)**, ¿Cuál es el valor de la pendiente de esa recta?*

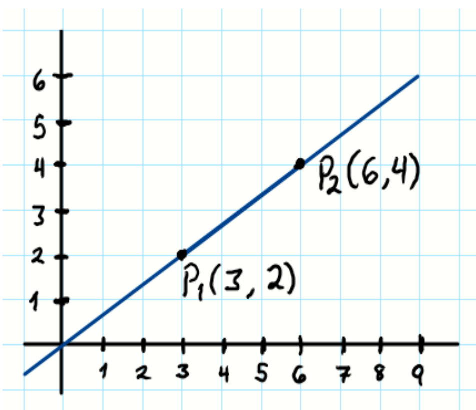
Solución

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 4$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 6$$

Aplicando la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4 - 2}{6 - 3}$$



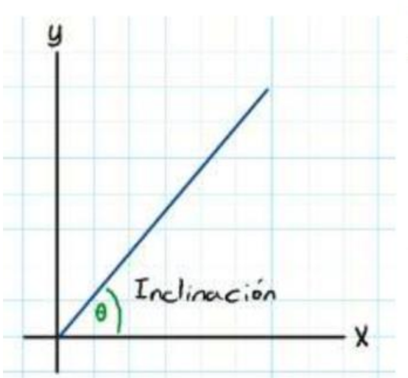
Entonces se sabe que la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{2}{3}$$

Figura 28

⦿ Pendiente y ángulo de inclinación

La pendiente de una recta también se define como la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas (ángulo de inclinación).



$$\boxed{m = \tan \theta}$$

El ángulo de inclinación (α) como su nombre lo indica es el que me indica que tan inclinada está la pendiente. Formalmente el ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje coordenado X en su dirección positiva, y se mide a partir del eje X en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

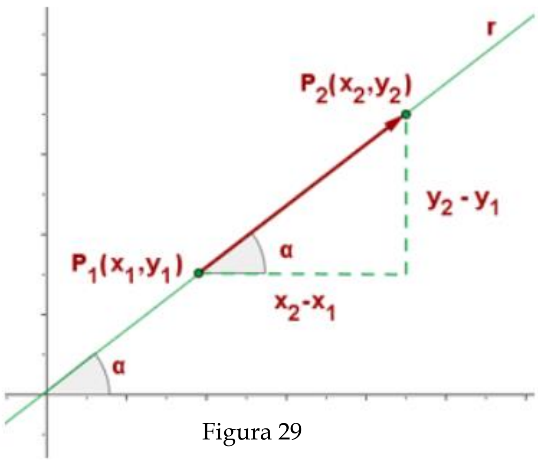


Figura 29

Observen la siguiente figura. La pendiente del ángulo está en función de la tangente, ya que se define como la razón entre el cateto opuesto y el adyacente.

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura tomada de https://sites.google.com/site/matematicasugarte/home/bloque-iii/pendiente-y-angulo-de-inclinacion-de-una-recta

Así que puedo encontrar la pendiente de una recta si conozco 2 puntos o me dan el ángulo de inclinación.

Obtener el ángulo de inclinación.

Dado que m = tan α, el valor del ángulo α, quedará determinado por la expresión:

α = arctan (m) o bien $\alpha = \tan^{-1}$ (m)

Nota. Un ángulo negativo indica que tomamos al revés los puntos. Por lo que se debe restar de 180° para encontrar el ángulo correcto.

Ejemplo 1

La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2, 1), B(4, 7) es:

Solución:

$$m = \frac{7-1}{4-2} = 3$$

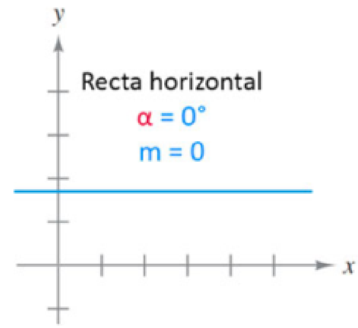
Y su ángulo de inclinación es:

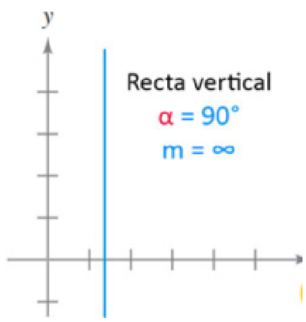
$\alpha = \tan^{-1}(3) = 71.5650 = 71° 33'' 54'$

Tipos de recta considerando la pendiente

El ángulo de inclinación puede asumir cualquier valor entre 0° y 180° ($0° \leq \alpha \leq 180°$), por lo que los tipos de recta que podemos encontrar en relación a la pendiente son:

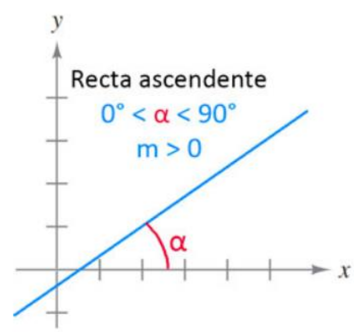
1. La recta horizontal. Es aquella que no forma ningún ángulo ($\alpha = 0°$ o si $\alpha = 180°$), es decir si realizamos un trazo de una recta en un plano cartesiano, entonces cualquier recta que sea paralela al eje "x" es horizontal, y por tanto su pendiente es cero (m=0). Sólo se definen en base al valor de y.

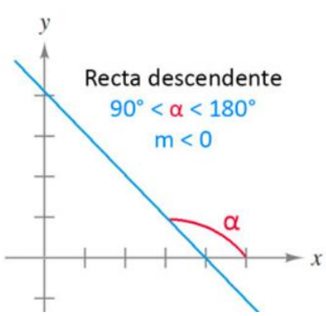




2. La recta vertical. Es aquella cuya que al trazarla se obtiene una recta paralela al eje "y" ($\alpha = 90°$), y desde la definición formal diremos que su pendiente es infinita ($m = \infty$). Solo se definen en base al valor de x.

3. La recta ascendente. Es una recta inclinada con pendiente **positiva**. Se caracteriza porque tiene un ángulo de inclinación menor a 90 grados con respecto a la horizontal ($0° < \alpha < 90°$.).





La recta descendente. Es una recta inclinada con pendiente **negativa**. Se caracteriza por tener un ángulo de inclinación mayor a 90 grados con respecto a la horizontal ($90° < \alpha \leq 180°$).

Ejemplo 2

La recta que pasa por los puntos A(1, 2), B(1, 7) no tiene pendiente, ya que la división por 0 no está definida.

Solución:

$m = \frac{7-2}{1-1} = \frac{5}{0}$

Ejemplo 3

Halle la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 135°.

Solución:

m = tan 135° = -1

Ejemplo 4

Una recta pasa por los puntos A(-3,4) y B(1,-4). Encuentre su pendiente y su ángulo de inclinación.

Solución:

$m = \frac{-4-4}{1-(-3)} = \frac{-8}{1+3} = \frac{-8}{4} = -2$

Cálculo del ángulo de inclinación:
$\alpha = \tan^{-1}(-2) = -63.43°$

NOTA: El valor del ángulo de inclinación debe resultar positivo, en un valor entre 0° y 180°. Cuando el valor del ángulo de inclinación obtenido resulta negativo se suma 180° para obtener el ángulo de inclinación correcto:

$\alpha = 180° - 63.43° = 116.56° = 116° \, 33' \, 54''$

Actividad 2.1.1

Instrucciones:

1. Resuelve correctamente cada uno los siguientes ejercicios que a continuación se te presentan.
2. La solución la puedes hacer en la libreta que tengas destinada para la asignatura. En el caso de no contar con una libreta para la asignatura, puedes realizar en hojas reciclables o en blanco.

Ejercicios

a) Calcula la pendiente de las rectas cuyos ángulos de inclinación se indican
   i. 65º
   ii. 45º.

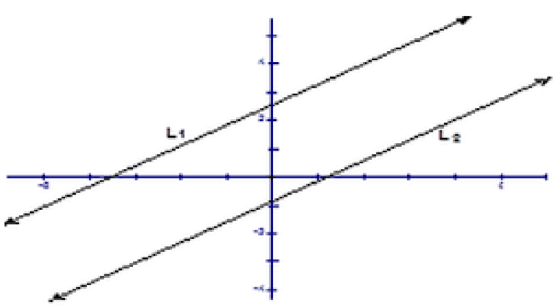
b) Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos
   i. A(2,4) y B(6, 8)
   ii. A(1,-1) y B(-3, 3)
   iii. A(3/4,2) y B(6,7/3)

c) Con los conocimientos adquiridos vas a calcular la pendiente de unas escaleras, para ello medirás el largo y el ancho de los escalones y con esa información aplicarás la fórmula para así conocer su pendiente, posterior a ello en tu cuaderno dibujarás un plano cartesiano en el cuál la expresarás mediante una recta. Además, calcula el ángulo de inclinación de la recta

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

I. Rectas paralelas

Dos rectas paralelas tienen el mismo ángulo de inclinación, esto implica que **sus tangentes son iguales**, es decir, las pendientes coinciden.



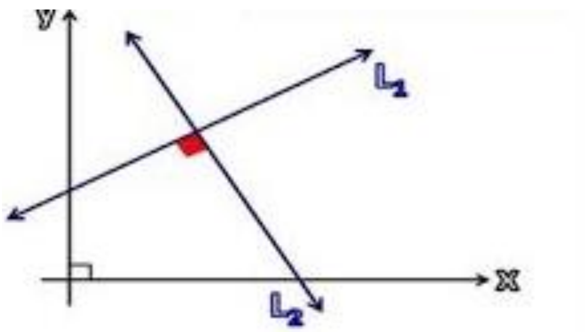
Condición de paralelismo

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si y solo si, sus pendientes son iguales **($m_1 = m_2$)**

Figura 30

II. Rectas perpendiculares

Dos rectas perpendiculares tienen ángulos de inclinación de 90 grados, esto implica que sus tangentes son recíprocas y de signo contrario, es decir, el **producto de sus pendientes** es **-1.**



Condiciones de perpendicularidad

Dos rectas L1 y L2 son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1 (m1*m2 = -1)

Figura 31

Ejemplo 1

Demuestre que la recta que pasa por los puntos A(−2,5) y B(4,1) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos C(−1,1) y D(3,7).

Solución:

$$m_{AB} = \frac{1-5}{4-(-2)} = -\frac{4}{6}$$
$$m_{CD} = \frac{7-1}{3-(-1)} = \frac{6}{4}$$

Ya que $m_{AB}m_{CD} = \left(-\frac{4}{6}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = -\frac{24}{24} = -1$

Se concluye entonces que son perpendiculares.

◉ Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo de dos rectas al **menor** de los ángulos que forman éstas.

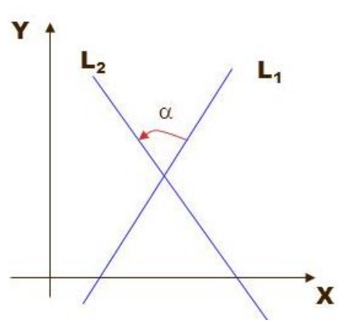


Figura 32

Si m_1 es la pendiente de la recta l_1 y m_2 la pendiente de la recta l_2, entonces podemos ocupar la siguiente fórmula para encontrar la tangente del ángulo comprendido entre las rectas, y en consecuencia el ángulo:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}}$$

Se debe tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, en la recta que inicie el ángulo será la pendiente inicial (m_1), y en la recta que termine, la pendiente final (m_2).

Despejando de la fórmula anterior podemos obtener el ángulo entre dos rectas.

$$\alpha = arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \qquad \text{O bien} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

Nota: Las dos líneas denotan valor absoluto, es decir se considera positivo siempre el resultado.

Ejemplo 1

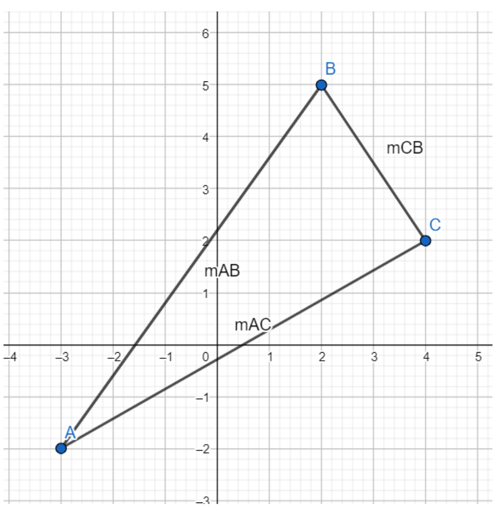
Encontrar el ángulo entre las rectas A y B, con pendiente m_A= 3 y m_B= -2.

Solución:

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{3-(-2)}{1+3\cdot(-2)}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{5}{1-6}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{5}{-5}\right| = \tan^{-1}|-1| = \tan^{-1}1 = 45°$$

Ejemplo 2

Encuentra los 3 ángulos del triángulo formado por las siguientes coordenadas A(-3,-2) ; B(2 ,5) ; C(4,2), dibuja el triángulo formado en un plano cartesiano.



$$mAB = \frac{5-(-2)}{2-(-3)} = \frac{7}{5} \qquad mBC = \frac{2-5}{4-2} = \frac{-3}{2}$$

$$mAC = \frac{2-(-2)}{4-(-3)} = \frac{2+2}{4+3} = \frac{4}{7}$$

$$\alpha A = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{4}{7}-\frac{7}{5}}{1+\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{5}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-29}{35}}{1+\frac{4}{5}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-29}{35}}{\frac{9}{5}}\right|$$

$$=\tan^{-1}\left|\frac{-29}{63}\right| = \tan^{-1}\frac{29}{63} = 24.71 = \underline{24°\ 43'\ 2''}$$

$$\alpha B = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{7}{5}-(-\frac{3}{2})}{1+\frac{7}{5}\cdot(-\frac{3}{2})}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{7}{5}+\frac{3}{2}}{1-\frac{21}{10}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{29}{10}}{-\frac{11}{10}}\right|$$

$$=\tan^{-1}\left|-\frac{29}{11}\right| = \tan^{-1}\frac{29}{11} = 69.22 = \underline{69°\ 13'\ 39''}$$

$$\alpha C = \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{3}{2}-\frac{4}{7}}{1+(-\frac{3}{2})\cdot\frac{4}{7}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-29}{14}}{1-\frac{6}{7}}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-29}{14}}{\frac{1}{7}}\right|$$

$$=\tan^{-1}\left|\frac{-29}{2}\right| = \tan^{-1}\frac{29}{2} = 86.05 = \underline{86°\ 3'\ 17''}$$

Actividad 2.1.2

Instrucciones:

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios.
2. La solución la puedes mostrar en la libreta que tengas destinada para la asignatura. Recuerda haber realizado un separador de bloque para llevar un control del mismo. En el caso de no contar con una libreta para la asignatura, puedes realizar en hojas reciclables.

Ejercicios

1. Halla la pendiente y el ángulo de la paralela a la recta que pasa por los puntos A(-3,4) y
B(-5,2)
2. Halla la pendiente y el ángulo de la perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(2,4) y B(6,9).
3. Halla la pendiente y el ángulo de la perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(−2,3) y B(3,−2).
4. Encuentra el ángulo que se forman con la recta L_1 que pasa por los puntos A(7,5) , B(2,3) y por la recta L_2 que pasa por los puntos C(6,-7), D(1,5)
5. Encuentra los 3 ángulos del triángulo formado por las siguientes coordenadas A(0,0) ; B(-1,5) ; C(4,2), dibuja el triángulo formado en un plano cartesiano

Evaluación

- La actividad 1.1 y 1.2 serán evaluadas con el instrumento de evaluación número 5

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea las diferentes formas de la ecuación de la recta favoreciendo su pensamiento crítico y el trabajo metódico en la resolución de situaciones del ambiente que lo rodea.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- **Conocimiento (s):** Formas de la ecuación de la recta/punto-pendiente/Dos puntos/Pendiente-Ordenada/Simétrica/General/Normal/Distancia de un punto a una recta

Lectura previa

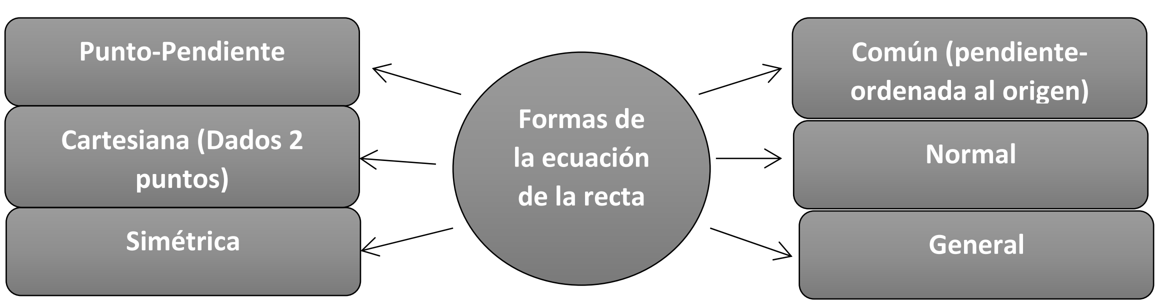
Lee con mucha atención el siguiente texto:

Las líneas rectas son útiles en el estudio, el análisis y la solución de diversas situaciones. En geometría analítica, la línea recta se expresa por medio de una ecuación de primer grado con dos variables: x y y. Su aplicación en situaciones cotidianas es muy común, por ejemplo, supongamos que investigamos los costos de contratar un servicio de telefonía celular para optar por la compañía que represente el mayor beneficio. Si tenemos 2 opciones como finalistas: Por un lado, IUSACELL proporciona un plan, en el cual cobran por cada minuto de llamada $5.00 en los primeros 5 minutos y los siguientes en $3.00, por otro lado, TELCEL con un esquema similar, los costos son de $4.00 el primer minuto y $3.50 los siguientes. ¿Cuál plan genera un mayor costo-beneficio? ¿Cómo podemos comparar los esquemas de ambas compañías? Estas preguntas pueden ser contestadas a través del desarrollo de un modelo lineal.

En esta actividad aprenderemos las diferentes formas de la ecuación de la recta que nos permitirá resolver situaciones didácticas que involucren modelos lineales.

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA.

Una recta, analíticamente, es una ecuación de primer grado con dos variables. En este apartado analizaremos las formas que puede tomar la ecuación de la recta a partir de sus elementos.



Ecuación de la recta Punto-pendiente

Geométricamente hablando, una recta queda perfectamente bien determinada si conocemos uno de sus puntos y su pendiente.

Para hallar la ecuación de una recta a partir de estos dos elementos, supongamos que (x_1,1) es uno de los puntos por los cuales pasa la recta; luego si (x, y) denota un cualquier punto de la recta distinto al punto (x_1, y_1) entonces, la pendiente m de la recta queda determinada por:

$$\mathrm{m} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

De donde obtenemos:

$$\mathrm{m}(x - x_1) = y - y_1$$

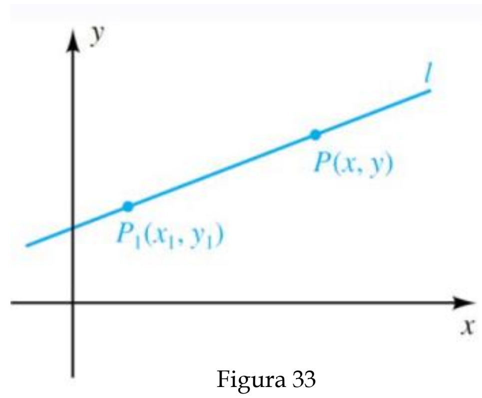


Figura 33

Puesto que (x, y) es punto cualquiera de la recta entonces la anterior relación es la ecuación de la recta denominada forma punto-pendiente. Así concluimos: La ecuación de la recta en su forma punto-pendiente está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Es importante decir, que a partir de esta ecuación se obtienen otras formas de la ecuación de la recta. Por otro lado, para graficar una recta dado un punto de ella y su pendiente se siguen los siguientes pasos:

1. Se ubica el punto dado (x_1 , y_1) en el plano coordenado.
2. Para este fin, es mejor tomar la pendiente en valor fraccionario, digamos $m = \frac{y}{x}$, luego a partir del punto (x_1 , y_1) se avanzan verticalmente hacia arriba tantas unidades como lo indique el numerador (si el signo de la pendiente es positivo) o hacia abajo (si el signo de la pendiente es negativo). A partir de allí, se avanzan hacia la derecha tantas unidades lo indique el denominador, localizando de esta manera otro punto por el cual también pasa la recta.
3. Así, se traza la recta de tal manera que pase por el punto (x_1 , y_1) dado y el punto localizado en el paso anterior.

Ejemplo 1

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,2) y tiene una pendiente igual a 2.

Solución:

1. Obtener datos. En este problema, (3, 2) y $m = 2$
2. Considerar la fórmula: $y - y_1 = \text{m}(x - x_1)$
3. Sustituir y desarrollar.

   $y - 2 = 2(x - 3)$
   $y - 2 = 2x - 6$ *Forma Punto-Pendiente*
   $y - 2 - 2x + 6 = 0$ (Igualando a cero)
   $y - 2x + 4 = 0$
   $-2x + y + 4 = 0$ (-1)
   $2x - y - 4 = 0$ *Forma General*

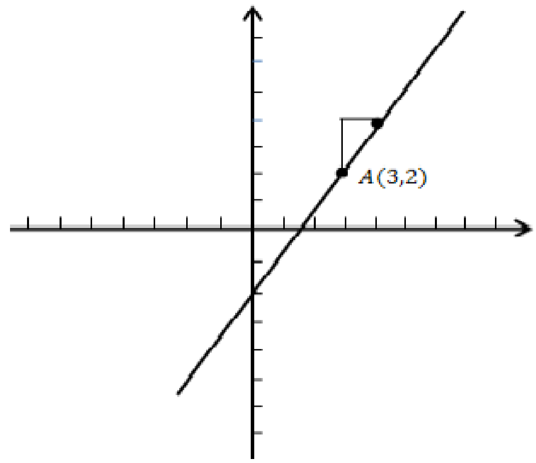


Figura 34

Ejemplo 2

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (−4, −3) y tiene una pendiente igual a -1/3.

Solución:

1. Obtener datos. Para este problema (−4, −3) y $m = -1/3$
2. Considerar la Fórmula: $y - y_1 = \text{m}(x - x_1)$
3. Sustituir y desarrollar:

   $y - (-3) = -\frac{1}{3}(x - (-4))$

   $y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 4)$ *Forma Punto-Pendiente*

   $3(y + 3) = -1\,(x + 4)$
   $3y + 9 = -x - 4$
   $3y + 9 + x + 4 = 0$
   $3y + x + 13 = 0$
   $x + 3y + 13 = 0$ *Forma General*

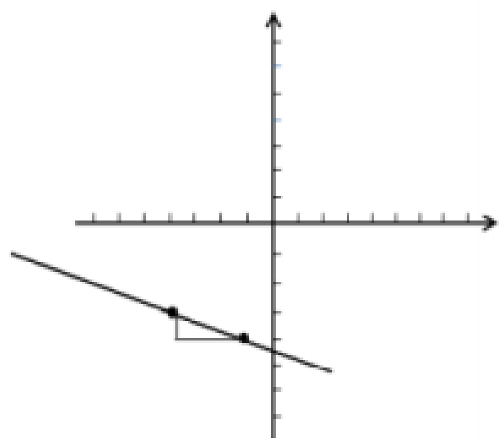


Figura 35

Ecuación de la recta dados Dos puntos.

Geométricamente una recta queda bien determinada por dos puntos cualesquiera de esta, y analíticamente hablando, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada si conocemos las coordenadas de cualquiera de sus puntos.

Si A(x_1 , y_1) y B(x_2 , y_2) son dos puntos diferentes cualesquiera de la recta entonces, la pendiente de la recta es:

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene su pendiente dada es:

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

De aquí que, conocida la pendiente y un punto de ella, digamos A(x_1 ,y_1), (es lo mismo si se elige B(x_2 , y_2)) se tenga que:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Esta última ecuación es conocida como la ecuación de la recta que pasa por dos puntos de ella.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los siguientes dos puntos: A(−2,3) y B(3, −4).

Solución:

1. Etiquetando coordenadas para evitar errores en la sustitución:
   A(−2, 3) y B(3, −4) x_1=-2 , y_1=3, x_2=3, y_2= -4
2. Fórmula: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
3. Sustituyendo valores:

$$y - 3 = \frac{-4-3}{3-(-2)}(x - (-2))$$
$$y - 3 = \frac{-7}{3+2}(x + 2)$$
$$y - 3 = \frac{-7}{5}(x + 2)$$
$$5(y - 3) = -7(x + 2)$$
$$5y - 15 = -7x - 14$$
$$5y - 15 + 7x + 14 = 0$$
$$5y + 7x - 1 = 0$$
$$7x + 5y - 1 = 0$$

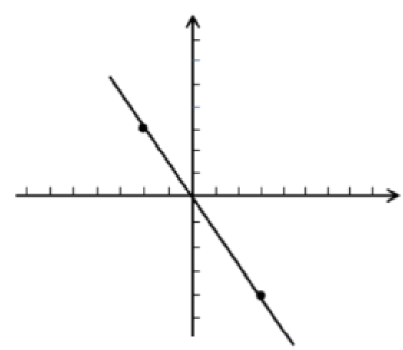


Figura 36

La obtención de su gráfica es fácil, únicamente se ubican los puntos A(−2,3) y B(3, −4) en el plano y se traza la recta por esos puntos

Ecuación de la recta Pendiente-ordenada al origen.

Este modelo lineal es uno de los más simples y prácticos para describir una recta y dibujar su gráfica.

Se le dice **ordenada en el origen** a la intersección de la recta con el eje Y y se representa con la letra b. (Ver figura) Ahora bien, si se conocen las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje Y, las cuales son (0, b) y también su pendiente m podemos obtener la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen aplicando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

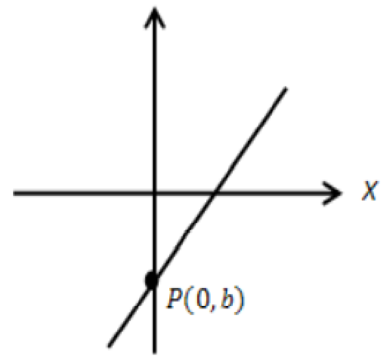


Figura 37

Sustituyendo el punto (0, b) en la ecuación punto-pendiente, tenemos:

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$
$$y - b = \mathrm{m}(x - 0)$$
$$y - b = mx$$
$$y = mx + b$$

Así la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada en el origen está dada por:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es −2 y cuya intersección con el eje Y es −3.

Solución: Su ecuación se obtiene mediante la forma: $y = mx + b$

1. Sustituyendo valores tenemos: $y = -2x + (-3) = -2x - 3 \rightarrow y = -2x - 3$

Para hacer la gráfica de la recta, se elabora antes una tabulación donde solo serán necesarios asignar dos valores a la variable x, evaluarlos en la ecuación pendiente-ordenada al origen y obtener así los correspondientes valores para y.

x	$y = -2x - 3$	$P(x, y)$
0	$-2(0) - 3 = -3$	$A(0, -3)$
1	$-2(1) - 3 = -5$	$B(1, -5)$

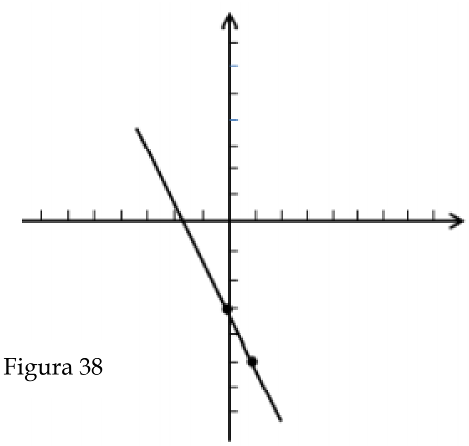


Figura 38

Ecuación Simétrica de la recta.

Forma de la recta que se determina conociendo los puntos donde intersecta (cruza) con los ejes "x" y "y"

Para obtener la ecuación simétrica de la recta, supongamos que conocemos las intersecciones de la recta con los dos ejes coordenados como se nos muestra en la figura:

Es fácil notar que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje X son de la forma $(a, 0)$ con $a \neq 0$ (algunas veces llamada esta forma abscisa en el origen) y que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje Y son de la forma $(0, b)$ con $b \neq 0$. (Esto es, la ordenada en el origen)

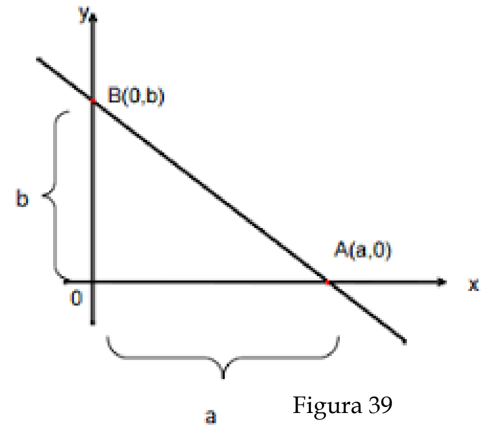


Figura 39

La ecuación de la recta en su forma simétrica se obtiene aplicando a los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, así tenemos:

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - \mathrm{a})$$
$$y = -\frac{b}{a}(x - \mathrm{a})$$
$$\mathrm{a}y = -b\,(x - \mathrm{a})$$
$$\mathrm{a}y = -bx + ab$$
$$\mathrm{a}y + bx = ab$$

$\longrightarrow$

Dividiendo entre ab la ecuación queda….

$$\frac{ay + bx = ab}{ab}$$

$$\frac{ay}{ab} + \frac{bx}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

Queda…

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Que es la forma simétrica de la recta.

Ejemplo 1

Se sabe que una recta en el plano interseca a los ejes X y Y en 2 y −3 respectivamente. Halle su ecuación.

Solución: Para hallar su ecuación utilizamos la fórmula:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

1. Sustituyendo valores, en este caso (2,0) y (0, −3) tenemos:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$$

2. Multiplicando por un denominador común a toda la ecuación, (en este caso 6) se obtiene:

$$3x-2y=6$$

$$3x-2y-6=0$$

Para hacer la gráfica de la recta se ubican las intersecciones con los ejes y se traza la recta por esos puntos.

Ecuación General de la Recta.

Si fuimos observadores, en todas las formas de la ecuación de una recta, obtuvimos una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$. (Constátelo revisando cada uno de los ejemplos hechos en cada una de las formas obtenidas). Esto se debe a que el lugar geométrico de una recta en el plano siempre tiene asignada una ecuación en esta forma.

Es decir, una recta, analíticamente es una ecuación de primer grado (o ecuación lineal) en dos variables de la forma:

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

Donde A, B, C son números reales y A, B no son simultáneamente nulos. La ecuación general se debe presentar de forma que *A* sea positiva.

- Si A = 0, entonces la ecuación general de la recta será de la forma ***y* = *r*** para algún número real ***r***, es decir, todos los puntos de esta recta tendrán la misma coordenada en el Eje Y, más aún, su gráfica será una recta totalmente horizontal.
- Si B = 0, entonces la ecuación general de la recta será de la forma ***x* = *r*** para algún número real ***r***, es decir, todos los puntos de esta recta tendrán la misma coordenada en el Eje X, más aún, su gráfica será una recta totalmente vertical.

También se pueden obtener los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas. El corte con el eje X, el punto a y el corte con el eje Y, el punto b:

$$a=-\frac{C}{A} \qquad b=-\frac{C}{B}$$

Así como la pendiente de la recta:

$$m=-\frac{A}{B}$$

Ejemplo 1

Dada la ecuación 6x -7y + 11 = 0 , encuentra la pendiente y las intersecciones con los ejes.

Solución:

1. Obtenemos los valores a A, B y C de la ecuación dada: A=6 , B= -7 y C=11

2. Sustituimos los valores A, B y C en las ecuaciones que se obtiene de la fórmula general para obtener la pendiente y las intersecciones con los ejes.

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{6}{-7} = \frac{6}{7}$$

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{11}{6}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{11}{-7} = \frac{11}{7}$$

Ejemplo 2

Calcula la ecuación en su forma general de la recta que pasa por el punto P(5,4) y es paralela a la recta: 3x + 2y - 5 = 0.

Solución:

1. Las rectas paralelas tienen pendientes iguales, por lo que, si hallamos la pendiente de la ecuación dada, podemos encontrar la ecuación que pasa por el punto dado.

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$$

2. Ya tenemos la m y un punto, sustituimos en la fórmula punto-pendiente y la desarrollamos para llegar a la ecuación solicitada en su forma general.

$y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 5)$ *Forma Punto-Pendiente*

$2(y - 4) = -3\,(x - 5)$

$2y - 8 = -3x + 15$

$2y - 8 + 3x - 15 = 0$

$2y + 3x - 23 = 0$ *Forma General*

Ecuación Normal de la Recta.

Esta forma de ecuación permite saber a qué distancia del origen se halla la recta.

Su nombre se debe a que los parámetros de dicha recta están tomados a partir de una recta perpendicular a la recta de la cual deseamos representar su ecuación; además dicha perpendicular pasa por el origen de coordenadas rectangulares. Si consideramos el segmento de la recta que tiene como extremo el origen y el punto donde ambas se cortan, se identifican dos elementos ligados a la recta a considerar; por el otro lado el ángulo de inclinación de la recta, quedando la ecuación:

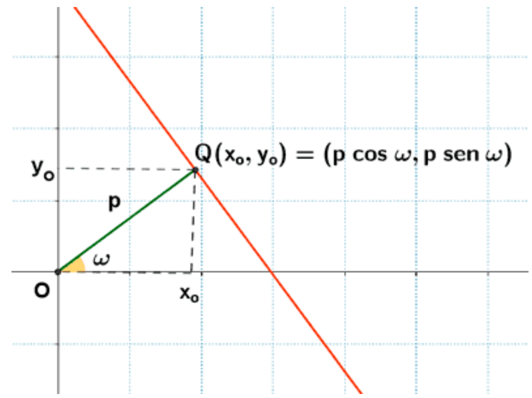


Figura 40

$$\boxed{x \cos \omega + y \, sen \, \omega - p = 0}$$

Para ciertos tipos de problemas, la ecuación de la recta normal se utiliza en su forma general.

La ecuación de la recta normal en su forma general es:

$$\frac{A\,x + B\,y + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Donde A, B ,C son reales y los coeficientes A, B no pueden ser cero simultáneamente.

Para obtener esta ecuación basta dividir ambos lados de la ecuación de la recta en su forma general entre $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Ejemplo 1

Calcula la ecuación en forma normal de la recta: 12x – 5y + 1 = 0

Solución:

En este ejemplo necesitamos convertir la ecuación de la recta en forma general a la forma normal.

1. Para eso basta calcular el valor del denominador: $\sqrt{A^2 + B^2}$
2. y dividir ambos lados de la ecuación (en su forma general) por ese valor.

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

3. La ecuación normal de la recta será:

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{1}{13} = 0$$

Ejemplo 2

Calcula la ecuación (forma normal) de la recta que tiene pendiente m= -4 y que pasa por el punto P(1,3).

Solución:
Empezamos calculando la ecuación en forma punto-pendiente, así obtenemos su forma general y finalmente calculamos la ecuación en la forma normal.

1. Ecuación en forma punto-pendiente

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 3 &= -4(x-1) \\ y - 3 &= -4x + 4 \\ 4x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

2. Convertimos a la forma normal
Calculamos el valor de $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

3. La ecuación normal de la recta será:

$$\frac{4}{\sqrt{17}}x + \frac{1}{\sqrt{17}}y + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$$

Actividad 2.2

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios que se presentan.
2. La solución se tiene que hacer en hojas en blanco o en la libreta, ya que algunas soluciones llevan procesos algebraicos necesarios para llegar a la respuesta correcta.
3. Grafica las ecuaciones encontradas en una hoja cuadriculada.
4. Si tienes la posibilidad utiliza el software Geogebra para comprobar tus resultados

I. Hallar las siguientes ecuaciones de las rectas en su forma general (igualadas a cero).

a) Pasa por el punto P(4, -3) y cuya pendiente es -2

b) Pasa por el punto D(-2, 5) y su pendiente es ½

c) Pasa por el punto E(-3, -2) y su pendiente es -2/3

II. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-2, -5) , B(4,1).

III. Hallar la ecuación de la recta que para por el punto (-6 , 2) y que es paralela a la recta y = $\frac{4}{3}x - 1$ (Recuerda que en las rectas paralelas sus pendientes son iguales)

IV. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (- 5, 4) y que es perpendicular a la recta y = $-\frac{5}{3}x + 2$ (Recuerda que en las rectas perpendiculares sus pendientes son recíprocas y de signo contrario)

V. Hallar las siguientes ecuaciones de las rectas en su forma general (igualadas a cero). Grafícalas en una hoja cuadriculada.

a) Encuentra la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 4 y 5, respectivamente.

b) Encuentra la ecuación de la recta cuya intersección en x es 5 y la intersección en y es -3.

VI. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4, 5) y que es paralela a la recta 3x - y - 5 = 0.

VII. Encuentra la ecuación de la recta que para por el punto (4, -2) y que es perpendicular a la recta 5x - y -3 = 0.

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 6

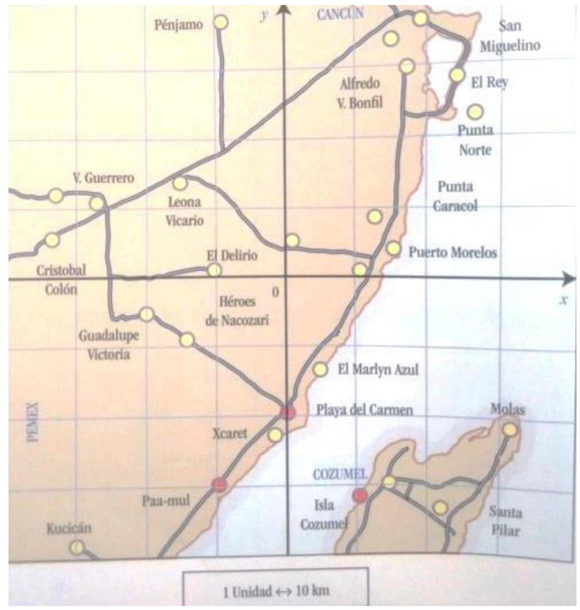
Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea las diferentes formas de la ecuación de la recta favoreciendo su pensamiento crítico y el trabajo metódico en la resolución de situaciones del ambiente que lo rodea.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- **Conocimiento (s):** Distancia de un punto a una recta

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

El borde costero entre Playa del Carmen y Paa-mul, en el estado de Quintana Roo puede describirse con la ecuación y = x – 20, de acuerdo con el plano mostrado (x, y en kilómetros). Utilizando la distancia de un punto a una recta se puede hallar la distancia mínima, en kilómetros, de Cozumel, situado en (1.2,-3.2), a la línea costera. ¿Será la misma distancia a la real que existe entre Cozumel y Playa del Carmen?



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

La distancia de un punto a una recta es aquella que es perpendicular a la recta (Ax + By +C=0) trazada desde el punto P(x,y), siendo esta distancia la mínima entre el punto y la recta.

La fórmula para calcular la mínima distancia medida desde el punto P(x_1, y_1) hasta la recta A x + B y + C = 0, es:

$$\boldsymbol{d} = \left|\frac{\boldsymbol{Ax_1} + \boldsymbol{By_1} + \boldsymbol{C}}{\sqrt{\boldsymbol{A^2} + \boldsymbol{B^2}}}\right|$$

Hay que poner necesariamente la ecuación de la recta en su **forma general** y sustituir en la ecuación los valores de las coordenadas del punto. El resultado se expresa en valor absoluto

.

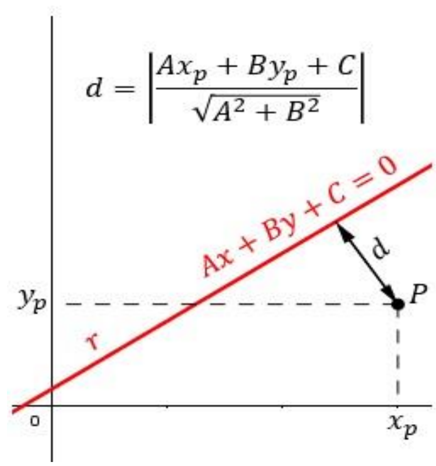


Figura 41

Ejemplo 1

Obtener la distancia entre la recta y el punto del plano dados:

$$y = \frac{12}{5}x + 4$$

$$P(2, 1)$$

Solución:

1. Como la ecuación de la recta está en la forma explícita se habrá de transformar a la forma general:

$$5y = 12x + 20$$
$$12x - 5y + 20 = 0$$

2. Se trasladan a la ecuación los valores de las coordenadas del punto P (2, 1):

$$d = \left|\frac{Ax_p + By_p + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{12 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 20}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{24 - 5 + 20}{\sqrt{144 + 25}}\right| = \left|\frac{39}{\sqrt{169}}\right| = \frac{39}{13} = \mathbf{3}$$

3. La distancia es 3 u.

Ejemplo 2

Calcula la distancia del punto P(5,-3) a la recta 2x + 3y + 4 = 0

Solución:

1. Como la ecuación de la recta ya está en su forma general, se sustituyen los datos en la fórmula de distancia de un punto a una recta.

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{2(5)+3(-3)+4}{\sqrt{2^2+3^2}}\right|$$

2. Se desarrolla la ecuación.

$$d = \left|\frac{2(5)+3(-3)+4}{\sqrt{2^2+3^2}}\right| = \left|\frac{10-9+4}{\sqrt{2^2+3^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{4+9}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{13}}\right|$$

3. La distancia es $\frac{5}{\sqrt{13}}$ u

Actividad 2.3

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios que se presentan.
2. La solución se tiene que hacer en hojas en blanco o en la libreta, ya que algunas soluciones llevan procesos algebraicos necesarios para llegar a la respuesta correcta.
3. Grafica las distancias encontradas a partir de los elementos dados en una hoja cuadriculada.

I. Hallar las siguientes distancias.

a) Del punto (2, -5) a la recta $4x + 3y - 5 = 0$.

b) Del punto (4 , -6) a la recta $12x + 5y - 6=0$.

II. Calcula la distancia entre las rectas paralelas $3x + 4y -12 = 0$ y $3x + 4y + 8 = 0$

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 7

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE III. Circunferencia

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica los conocimientos sobre la circunferencia y sus elementos, externando un pensamiento crítico y reflexivo para solucionar diferentes problemáticas de su entorno
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas /5 .1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo /5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información/ 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- **Conocimiento (s):** Lugar geométrico de la circunferencia.

- **Lectura previa**

Lee con mucha atención los siguientes textos:

⦿ Las cónicas

Como ha sucedido en numerosas ocasiones, importantes creaciones en matemáticas no tuvieron un origen que pronosticara su relevancia posterior. Uno de estos casos es el de las conocidísimas cónicas, en un principio estudiadas casi por simple diversión, pero de tan variadas aplicaciones en muchas ramas de la ciencia. Como es sabido, fue *Apollonius* de Perga, en el siglo III a.C. el primero que las introdujo públicamente, escribiendo el más importante tratado antiguo sobre las secciones cónicas, aunque ya en el siglo anterior *Menaechmus* había escrito el primer tratado sobre cónicas. Lo que no es tan conocido es que el motivo que originó esta creación no fue precisamente el de explicar las órbitas de los planetas ni construir aparatos de radar, sino el de buscar soluciones sólo con regla y compás de los tres famosos problemas griegos que hoy sabemos irresolubles, como son el de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Durante muchos siglos, las cónicas fueron descartadas en los trabajos de los matemáticos hasta que volvieron súbitamente a la vida, al comprobarse que el mundo que nos rodea está lleno de secciones cónicas.

Distintos puntos de vista pueden considerarse para proporcionar una definición de las cónicas, desde el clásico donde una ***cónica*** es la sección obtenida al cortar un cono por un plano, hasta la analítica donde una cónica es el lugar geométrico de los puntos que verifican una determinada relación de distancias. Ya estas definiciones permiten adelantar algunas propiedades que serán de utilidad en las aplicaciones.

A partir de este bloque iniciaremos con el estudio de las cuatro curvas que, por su importancia y aplicaciones en algunas ramas de la ciencia, es necesario considerarlas. Cada una de estas curvas se describirá como un **lugar geométrico** y se demostrará que cada una de ellas es la gráfica de una ecuación cuadrática en x o y, que se puede representar como caso especial de la ecuación general siguiente:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Estas cuatro curvas son: la **circunferencia**, la **parábola**, la **elipse** y la **hipérbola**, llamadas ***cónicas*** debido a que se pueden describir cómo las curvas que se generan al intersectarse un plano con un cono circular.

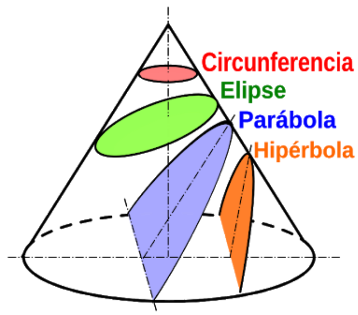


Figura 42

De las cuatro curvas cónicas, este bloque será dedicado al estudio de la **circunferencia.**

I. La circunferencia y el planeta Tierra

En el bloque anterior analizamos el primer ejemplo de lugar geométrico *la línea recta* y observamos la forma en la que se manifiesta**,** por ejemplo, en la naturaleza. En el presente bloque ampliaremos el estudio de los lugares geométricos, siendo ahora el turno de la *circunferencia*. Ésta tiene relación con la naturaleza y la vida del hombre en cada instante, por eso ha sido motivo de estudio desde la antigüedad.

La invención de la rueda, por ejemplo, es una manera de manifestar la relación que tiene la circunferencia con la vida de las personas. Hasta el siglo III a.c, Erastóstenes, filósofo, astrónomo y matemático griego con herramientas simples como las varas, imaginación, observaciones y estudio, sentó las bases para los mapas de navegación. Fue el primero en incorporar líneas paralelas en los (meridianos), con la cual introdujo la idea de la forma circular del planeta.

Uno de sus logros más notables fue la aproximación a la circunferencia de la Tierra, de hecho, fue el primero en hacerlo. Se dice que en un viaje a Egipto preguntó cómo se orientaban los marinos durante sus travesías; el capitán del barco señaló una estrella fija en el cielo, la cual debían mantener a proa cuando regresaban a Grecia y popa cuando se dirigían a Egipto. Además, el capitán le informó que el tamaño de las sombras de los objetos proyectaba al medio día disminuía al ir de Grecia a Egipto, así que la sombra que generaba el mástil del barco, era una referencia importante.

Con estos datos, Eratóstenes concluyó que ambas ciudades podían encontrarse en el mismo meridiano, y generó un modelo para encontrar el radio de la Tierra, el cual se basa en que la Tierra es una esfera y el Sol está lo suficientemente lejos para que los rayos fueran paralelos a ella.

Así aplicando algunos estudios de Euclides, y con elementos proporcionales, Eratóstenes llegó a la conclusión de que el radio de la Tierra es igual a 40 000/(2p) kilómetros, que equivale a 6 366.18 kilómetros, ¡sorprendente!, sobre todo si sabemos que el radio de la Tierra, de acuerdo con los cálculos efectuados con un sinnúmero de aparatos y tecnología, es de 6378 kilómetros. Como puedes notar es muy importante observar nuestro entorno y comprenderlo. Pero ¿cuál es la importancia?

En palabras de Galileo Galilei: "la ciencia está escrita en un libro abierto que se presenta ante nuestros ojos, el Universo. Pero no puede entenderse si antes no se aprende la lengua y los caracteres en que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuyo conocimiento es imposible comprenderla; es como girar vanamente en un obscuro laberinto".

Son incontables las aplicaciones que se basaban en el uso de la circunferencia: la rueda, los viajes espaciales, los discos magnéticos de almacenamiento, incluso en juegos simples como yoyo, trompo, o balero, por mencionar algunos.

II. La Circunferencia

a) Definición y elementos de la Circunferencia.

Circunferencia

Es un lugar geométrico, en la cual todos los puntos que la conforman están a la misma distancia de otro llamado **centro.**

Al centro lo representamos comúnmente con la letra *O*, y la distancia fija la llamamos **radio,** el cual representamos como *r*.

Así consideramos que los parámetros fundamentales de la circunferencia son el centro *O* y el radio *r*, con los cuales la circunferencia queda perfectamente definida.

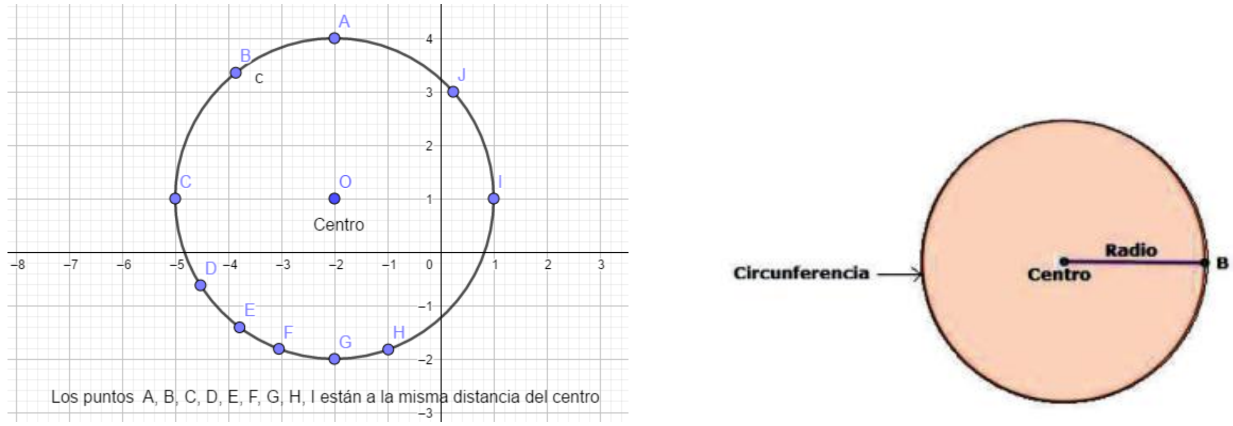


Figura 43

b) Puntos, rectas y segmentos de recta relacionados con la circunferencia

- **Centro:** punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio:** segmento que une al centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- **Diámetro:** segmento mayor que une dos puntos de la circunferencia y que necesariamente pasa por el centro.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia. Las cuerdas de longitud máxima son los diámetros
- **Arco**: segmento curvilíneo de puntos pertenecientes a la circunferencia.
- **Semicircunferencia**: cada uno de los dos arcos delimitados por los extremos de un diámetro.
- **Recta tangente**: es aquella que interseca a la circunferencia en un solo punto.
- **Recta secante**: es que interseca a la circunferencia en dos puntos.

En la siguiente imagen se muestra cada una de las rectas y segmentos.

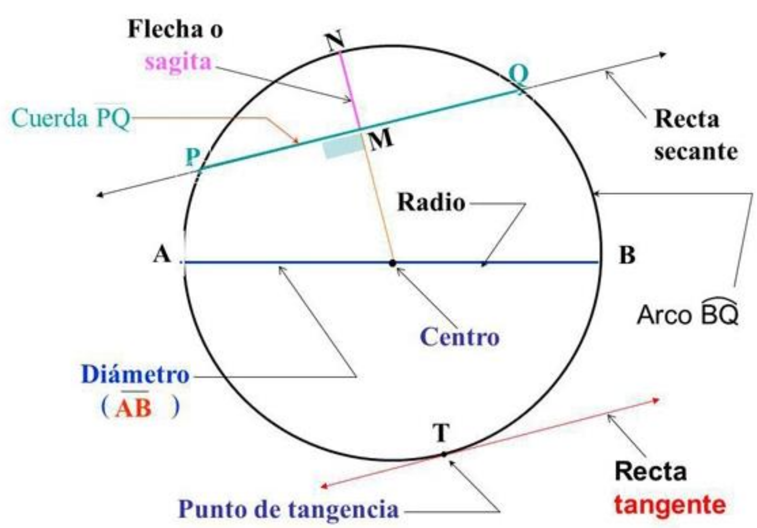
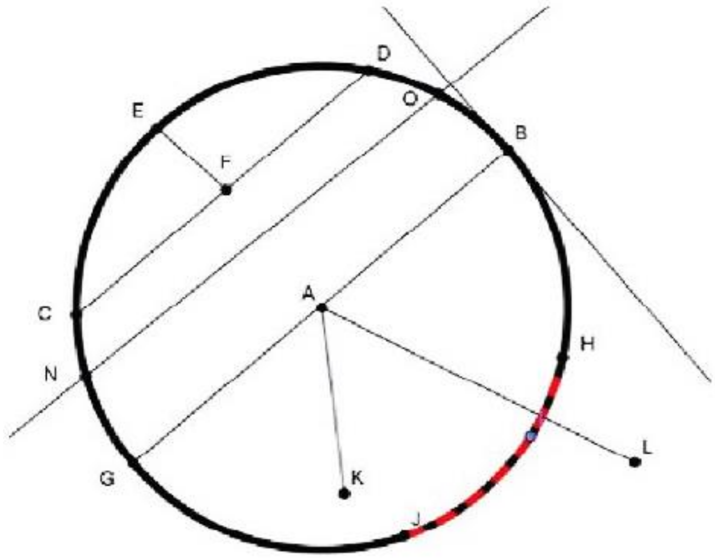


Figura 44

Actividad 3.1

Instrucciones.

I. Observa la siguiente imagen, identifica utilizando colores diferentes los segmentos, rectas y puntos que se solicitan en la tabla, en la columna de la izquierda se menciona la rectas, segmento o punto y en la columna de la derecha están las opciones. Para cada caso selecciona y encierra como respuesta una de las tres opciones.



Símbolo de la Recta, segmento o punto	Nombre		
B	Recta tangente	Recta secante	Arco
ON	Cuerda	Recta secante	Radio
HJ	Recta tangente	Flecha	Arco
L	Punto exterior	Diámetro	Flecha
K	Flecha	Diámetro	Punto interior
AB	Cuerda	Radio	Recta secante
EF	Cuerda	Flecha	Arco
CD	Cuerda	Flecha	Arco
BG	Radio	Diámetro	Arco

Evaluación

- Se utilizará el instrumento 8 lista de cotejo 3.1 rectas y segmentos de la circunferencia.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica los conocimientos sobre la circunferencia y sus elementos, externando un pensamiento crítico y reflexivo para solucionar diferentes problemáticas de su entorno
- **Atributo (s)**: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas /5 .1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo /5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información/ 8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- **Conocimiento (s):** Ecuación de la circunferencia/Forma ordinaria con centro en el origen y fuera de él/ Forma general/ Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

◉ Ecuaciones de la circunferencia

Nuevamente se presenta el problema: se tiene un lugar geométrico y se requiere encontrar la ecuación que la describe, para la Circunferencia se pueden presentar dos casos importantes

- Cuando la circunferencia está centrada en el origen
- Cuando no tienen como centro al origen

Para ambos casos es posible expresar la ecuación que determina ese lugar geométrico.

I. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen (Ecuación Canónica)

La forma más simple de una circunferencia es aquella de la que se sabe que tiene centro en el origen y un radio de longitud *r*; cada punto de la circunferencia equidista del centro, entonces, partiendo de la fórmula de distancia entre dos puntos, donde uno de los puntos es el origen e igualando la distancia al valor del radio, se tiene:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Se debe poner especial atención en el término del lado derecho que corresponde al valor del radio. La circunferencia no describe una función sino más bien una relación; es decir, que, en este caso, a cada elemento del dominio(x) le corresponden dos valores del condominio (y) de tal forma que una parte de la circunferencia se trazará en la parte positiva del eje de las ordenadas y la otra parte tendrá el mismo valor, pero con signo opuesto o negativo, por lo que se trazará en la parte negativa del eje de las ordenadas.

Con base a lo anterior se define lo siguiente:

La forma de la **ecuación canónica** de la Circunferencia, está dada por la expresión

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Donde *r*, representa el valor del radio de la circunferencia y su centro es el origen.

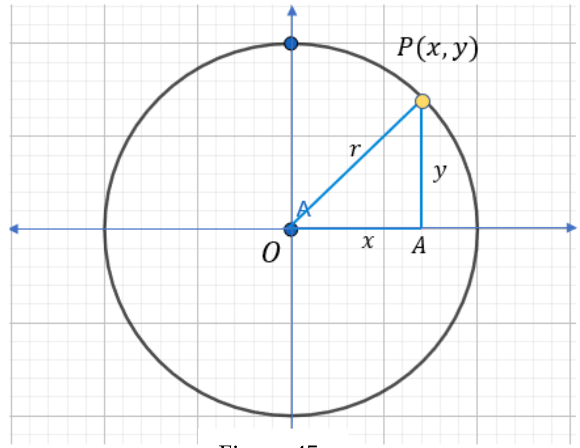


Figura 45

Ejemplo 1

Calcula la ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen y radio 2/3.

<u>Solución:</u>

Sustituimos el valor del radio en la ecuación canónica:

$x^2 + y^2 = r^2$

Quedando de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$ → Ecuación canónica

La representación gráfica se muestra a continuación:

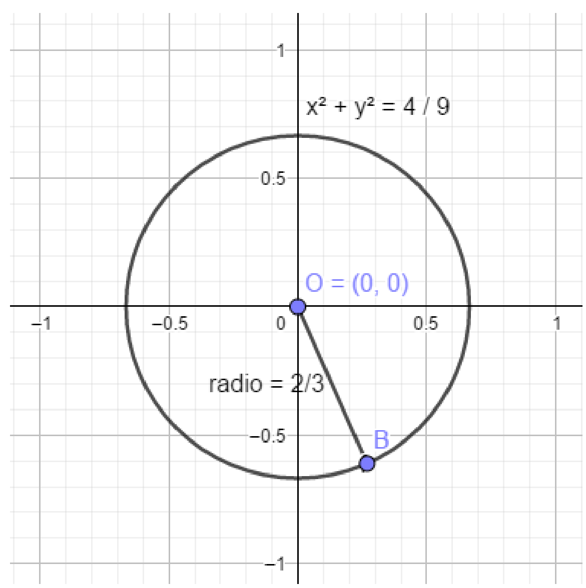


Figura 46

Además podemos transformar la ecuación canónica a la ecuación en su forma general:

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{9} = 0$$

$$\left((x^2 + y^2 - \tfrac{4}{9}) = 0\right)9$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4 = 0$$ Ecuación general

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(3,7) y cuyo centro se encuentra en el punto C (0,0)

Solución:

Primero calculamos el radio aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos.

Para el punto A(3,7) ; $x_1 = 3$ y $y_1 = 7$

Para el punto C (0,0) ; $x_2 = 0$ y $y_2 = 0$

$$\boldsymbol{d(A,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$
$$\boldsymbol{d(A,C) = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 7)^2}}$$
$$\boldsymbol{d(A,C) = \sqrt{9 + 49}}$$
$$\boldsymbol{d(A,C) = \sqrt{58}}$$
$$\boldsymbol{radio = \sqrt{58}}$$

Ahora sustituimos en la ecuación canónica

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = (\sqrt{58})^2}$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 58}$$

La gráfica se muestra a continuación:

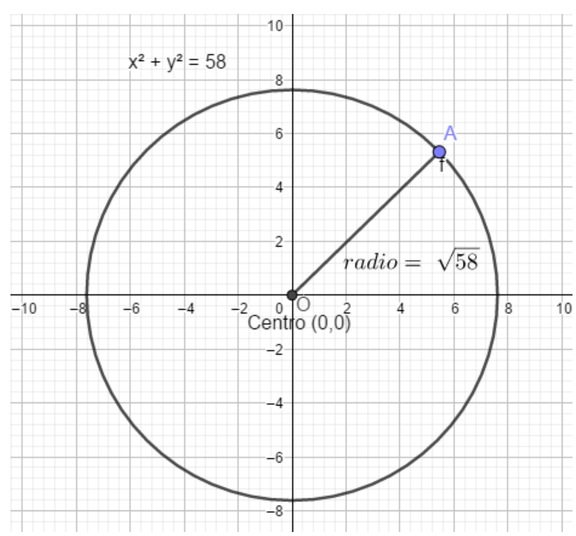


Figura 47

II. Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen (Ecuación ordinaria)

Una modificación de la forma canónica ocurre cuando se tiene una circunferencia con centro diferente al origen, por lo general se indica como punto con coordenadas *(h, k)*, y además se conoce el radio de la circunferencia. Como todos los puntos de la circunferencia equidistan del centro, se parte de la ecuación de la distancia entre dos puntos y se sustituye uno de los puntos por *(h, k)* que indica el centro de la circunferencia dada. De esta forma se tiene.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Nuevamente se ha elevado el término que corresponde al radio de la circunferencia, a la segunda potencia, ya que para un valor de la abscisa x le corresponden dos valores de la ordenada.

Entonces se tiene lo siguiente:

La forma de la **ecuación ordinaria** de la Circunferencia con centro en el punto *(h, k)* y radio *r*, está dada por la expresión

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

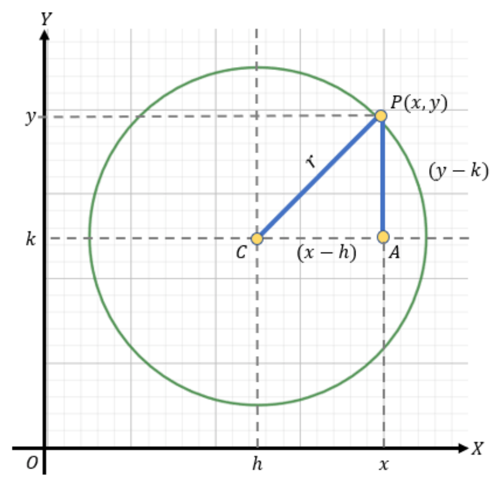


Figura 48

Ejemplo 1

Calcula la ecuación ordinaria de la circunferencia si su centro es C(2, 6) y su radio es 4. Realiza su gráfica.

Solución:

Como el centro es C(2, 6) entonces h= 2 y k= 6. El radio es r= 4
Sustituimos en la ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2+(y-6)^2=(4)^2$$

$$(x-2)^2+(y-6)^2=16 \Rightarrow \boxed{\text{Ecuación ordinaria}}$$

La gráfica se muestra a continuación:

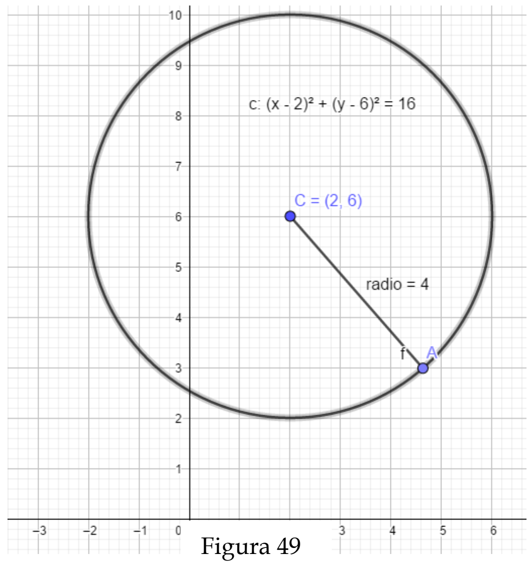


Figura 49

Además, podemos convertir esta ecuación a su forma general, desarrollando los binomios, simplificando términos e igualando a cero.

$$(x-2)^2+(y-6)^2=16$$

$$(x)^2+2(x)(-2)+(-2)^2+(y)^2+2(y)(-6)+(-6)^2=16$$

$$x^2-4x+4+y^2-12y+36=16$$

$$x^2+y^2-4x-12y+4+36-16=0$$

$$x^2+y^2-4x-12y+24=0 \Rightarrow \boxed{\text{Ecuación general}}$$

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación ordinaria de una circunferencia si los extremos de uno de sus diámetros son A(4, -3) y B(-2, 7). Conociendo los extremos de un diámetro, ¿Cómo obtendrías el centro? ¿Y el radio?

Solución:

Como el segmento AB es un diámetro, el centro es el punto medio de este segmento, y el radio es la mitad de la distancia entre A y B:

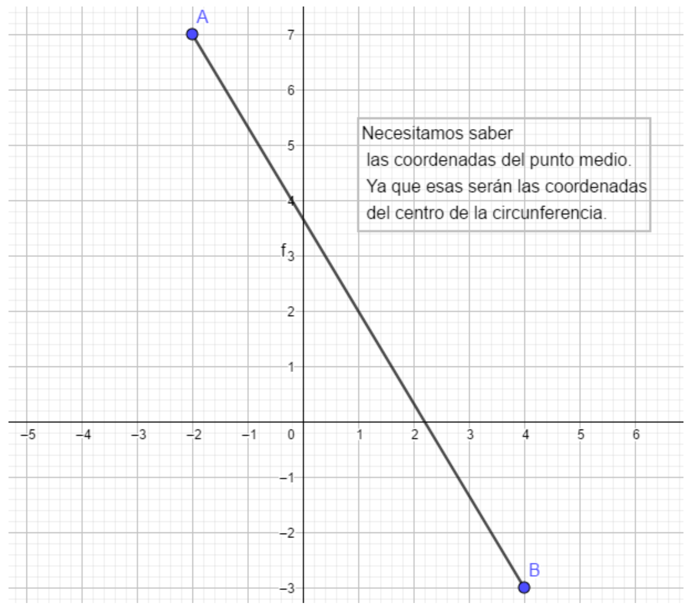


Figura 50

Para hallar las coordenadas del punto medio, utilizamos las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Como A(4,–3) y B(–2,7)

$\qquad x_1, y_1 \qquad x_2, y_2$

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$x = \frac{4+(-2)}{2}$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$y = \frac{-3+7}{2}$$

$$y = \frac{4}{2}$$

$$y = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio son (1,2)

Mismas que corresponden a las coordenadas del centro C(1, 2)

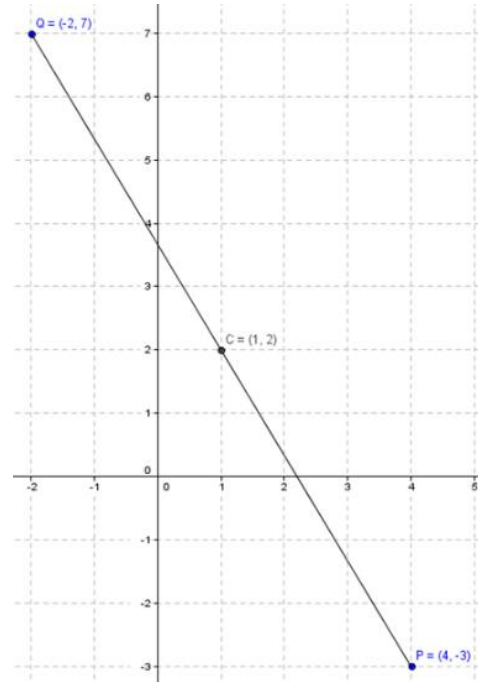


Figura 51

Para hallar el radio, primero calculamos la longitud del diámetro, es decir calculamos la distancia que hay entre los puntos A y B, con la fórmula:

$$(A, B) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Como A(4, –3) y B(–2, 7)

x_1, y_1 x_2, y_2

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - (-3))^2 + (-2 - 4)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(7 + 3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{(10)^2 + 36} = \sqrt{136}$$

Es decir $diámetro = \sqrt{136}$ $\Rightarrow$ $r = \frac{\sqrt{136}}{2}$

Ahora sustituimos los datos del centro y el radio en la ecuación ordinaria;

Como el centro es (1, 2) $\rightarrow$ h = 1 y k=2

$$r = \frac{\sqrt{136}}{2}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\frac{\sqrt{136}}{2}\right)^2$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{(\cancel{\sqrt{}}136)^{\cancel{2}}}{(2)^2}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{136}{4}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=34 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Ecuación ordinaria}}$$

Ahora la podemos transformar a la forma general

$$(x-1)^2+(y-2)^2=34$$

$$(x)^2+2(x)(-1)+(-1)^2+(y)^2+2(y)(-2)+(-2)^2=34$$

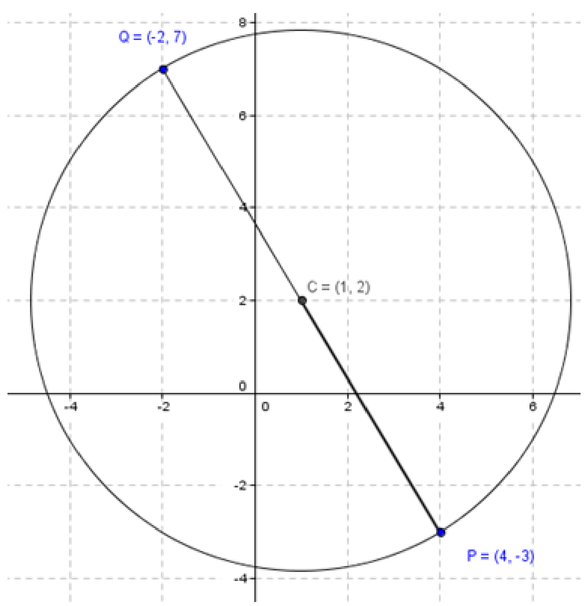
$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=34$$

$$x^2-2x+y^2-4y++1+4-34=0$$

$$x^2+y^2-2x-4y-29=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Ecuación general}}$$

La representación gráfica se muestra a continuación:

Figura 52



III. Ecuación general de la circunferencia

La forma de hallar la ecuación general de la circunferencia es partiendo de la forma ordinaria y realizar algunas operaciones:

Si tenemos la forma ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Desarrollando los binomios $(x)^2+2(x)(-h)+(-h)^2+(y)^2+2(y)(-k)+(-k)^2= r^2$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

Ordenando los términos $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2=r^2$

Igualando la ecuación con cero $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

Con la finalidad de que todas las cónicas tengan una misma estructura, se sustituyen los coeficientes por las siguientes literales:

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$$F = h^2+k^2-r^2$$

Se tiene, entonces que $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

A partir de estos elementos se presenta lo siguiente:

La **ecuación general** de la Circunferencia está dada por la expresión:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

IV. Obtención de las coordenadas del centro y valor del radio a partir de la forma general de la ecuación de la circunferencia.

La forma más sencilla de obtener las coordenadas del centro y valor de la longitud del radio de una circunferencia, a partir de su forma general, es precisamente encontrando la ecuación en su forma ordinaria.

Para hacer este procedimiento, se partirá de la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Pasar el término independiente del lado derecho de la ecuación: $x^2 + y^2 + Dx + Ey = -F$

Reordenar términos: $x^2 + Dx + y^2 + Ey = -F$

Completar el trinomio cuadrado perfecto para x y y, y sumando del lado derecho para mantener la igualdad. Notemos que para hallar el tercer término del trinomio se divide el coeficiente del término lineal entre dos y se eleva a la segunda potencia.

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

Al expresar el trinomio cuadrado perfecto como suma de cuadrados tenemos:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Ésta última ecuación tiene la forma de la ecuación ordinaria de una circunferencia; sin embargo, no siempre sucede que la ecuación inicial represente una circunferencia, y esto depende del término $\frac{D^2+E^2-4F}{4}$ que expresa el valor del radio. Se pueden presentar tres situaciones:

Si $r^2 > 0$	se trata de una circunferencia con centro en las coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$
Si $r^2 = 0$	Se trata de una circunferencia tiene radio cero o que representa solamente un punto con coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.
Si $r^2 < 0$	Entonces el valor del radio equivaldría a obtener la raíz cuadrada de un número negativo, lo cual no tiene sentido en el campo de los números reales. Por lo que se concluye que no se trata de la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación en su forma ordinaria, las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia que tiene por ecuación general $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$

Solución:

$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ Ecuación dada

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 10y) = -30$ Agrupamos términos en x y en y

$(x^2 - 6x + ?) + (y^2 + 10y + ?) = -30 + ? + ?$ Completamos cuadrados en x y y

$(x^2 - 6x + \_\_) + (y^2 + 10y + \_) = -30 + \_ + \_$

$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = \mathbf{9}$ $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = \mathbf{25}$

$(x^2 - 6x + \mathbf{9}) + (y^2 + 10y + \mathbf{25}) = -30 + \mathbf{9} + \mathbf{25}$ Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos

$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$ Ecuación ordinaria

Por lo tanto:
La circunferencia tiene centro en C(3, -5) y radio $r = \sqrt{4} = 2$

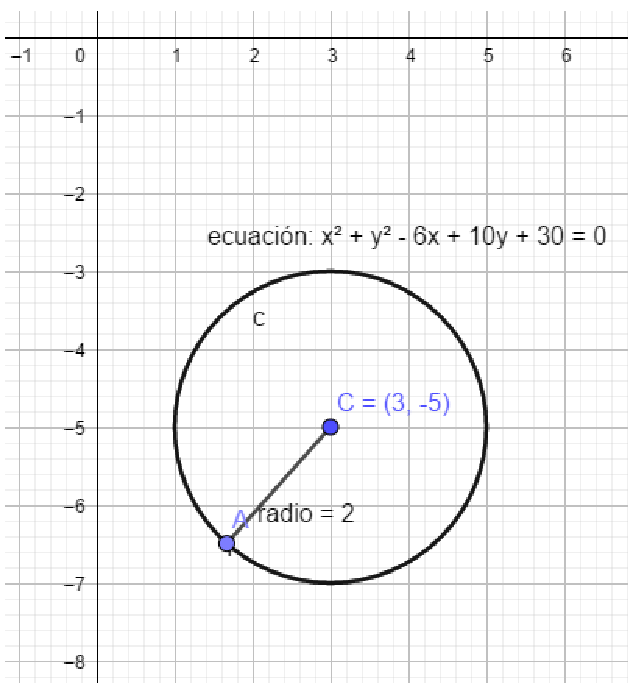


Figura 53

V. Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos

Ejemplo 1

Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

$$P(-2,3), Q(-2,-3) \text{ y } R(6,-1)$$

Solución:

Sustituimos los valores de las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia en a la forma general. Así por cada punto obtendremos una ecuación.

Ecuación para el punto P(-2, 3)

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$(-2)^2 + (3)^2 + D(-2) + E(3) + F = 0$

$4 + 9 - 2D + 3E + F = 0$

$13 - 2D + 3E + F = 0$

$-2D + 3E + F = -13$

Ecuación para el punto Q(-2, -3)

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$(-2)^2 + (-3)^2 + D(-2) + E(-3) + F = 0$

$4 + 9 - 2D - 3E + F = 0$

$13 - 2D - 3E + F = 0$

$-2D - 3E + F = -13$

Ecuación para el punto P(6, -1)

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$(6)^2 + (-1)^2 + D(6) + E(-1) + F = 0$

$36 + 1 + 6D - 1E + F = 0$

$37 + 6D - E + F = 0$

$6D - E + F = -37$

De modo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 3 x 3

$-2D + 3E + F = -13$

$-2D - 3E + F = -13$

$6D - E + F = -37$

Resolvemos por el método de suma y resta

$-2D + 3E + F = -13$

$\underline{-2D - 3E + F = -13}$

$-4D \qquad + 2F = -26 \qquad (1)$

$-2D - 3E + F = -13$

$\underline{(6D - E + F = -37)\ (-3)}$

$– 2D – \cancel{3E} + F = -13$
$- 18D + \cancel{3E} -3F = 111$
$- 20D \quad -2F = 98 \quad (2)$

$- 4D + 2F = - 26 \quad (1)$
$- 20D - 2F = 98 \quad (2)$
$- 24D = 72$
$D = 72/-24 = -3$

Sustituyendo en D= -3 en la ecuación (1)
$- 4D + 2F = - 26$
$-4(-3) + 2F = -26$
$12 + 2F = -26$
$2F = -26-12$
$2F = -38$
$F = -38/2 = -19$

Sustituyendo en la primera ecuación original D = -3 y F = -19
$– 2D + 3E + F = -13$
$– 2(-3) + 3E -19 = -13$
$6 + 3E – 19 = -13$
$3E – 13 = -13$
$3E = -13 + 13$
$E = 0/3 = 0$

Ya tenemos entonces las 3 variables que necesitamos para sustituir en la ecuación general.
D= -3, E= 0 y F= -19

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
$x^2 + y^2 + (-3)x + 0y + (-19) = 0$
$x^2 + y^2 - 3x -19 = 0$

También se puede resolver por el método de determinantes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & -13 \\ -2 & -3 & 1 & -13 \\ 6 & -1 & 1 & -37 \end{array}\right]$$

Primero calculamos el determinante especial:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 48$$

Dado que el resultado fue distinto de cero, entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.

Ahora calculemos los determinantes auxiliares para las incógnitas:

Determinante auxiliar para D.

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -13 & 3 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \\ -37 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -144$$

Determinante auxiliar para E.

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} -2 & -13 & 1 \\ -2 & -13 & 1 \\ 6 & -37 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante auxiliar para F.

$$_F = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -13 \\ -2 & -3 & -13 \\ 6 & -1 & -37 \end{vmatrix} = -912$$

Finalmente realizamos los cocientes y obtenemos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Delta_D}{\Delta_p} = \frac{-144}{48} = -3 \\ E &= \frac{\Delta_E}{\Delta_p} = \frac{0}{48} = 0 \\ F &= \frac{\Delta_F}{\Delta_p} = \frac{-912}{48} = -19 \end{aligned}$$

Para obtener las coordenadas del centro y el radio :

$$\boldsymbol{h = -\frac{D}{2} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{k = -\frac{E}{2} = -\frac{0}{2} = 0}$$

$$\boldsymbol{r = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 - (-19)} = \sqrt{\frac{9}{4} + 19} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}}$$

$$\boxed{C\left(\frac{3}{2}, 0\right) \qquad r = \frac{\sqrt{85}}{2}}$$

La gráfica queda de la siguiente manera:

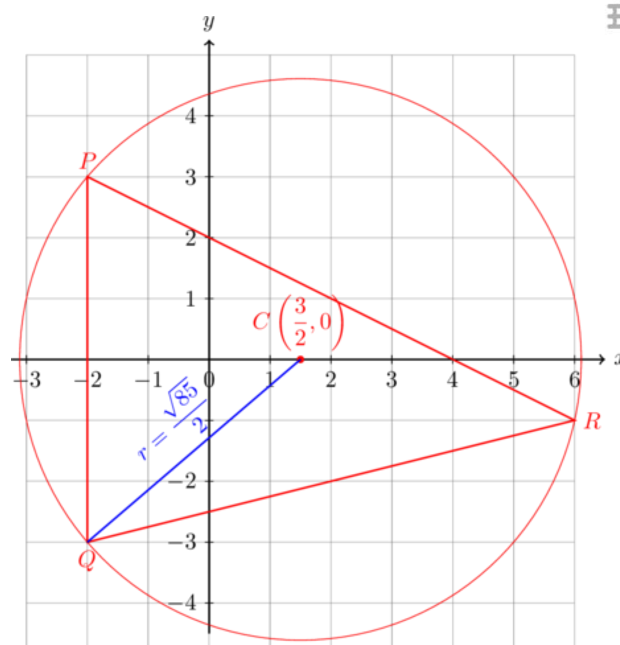


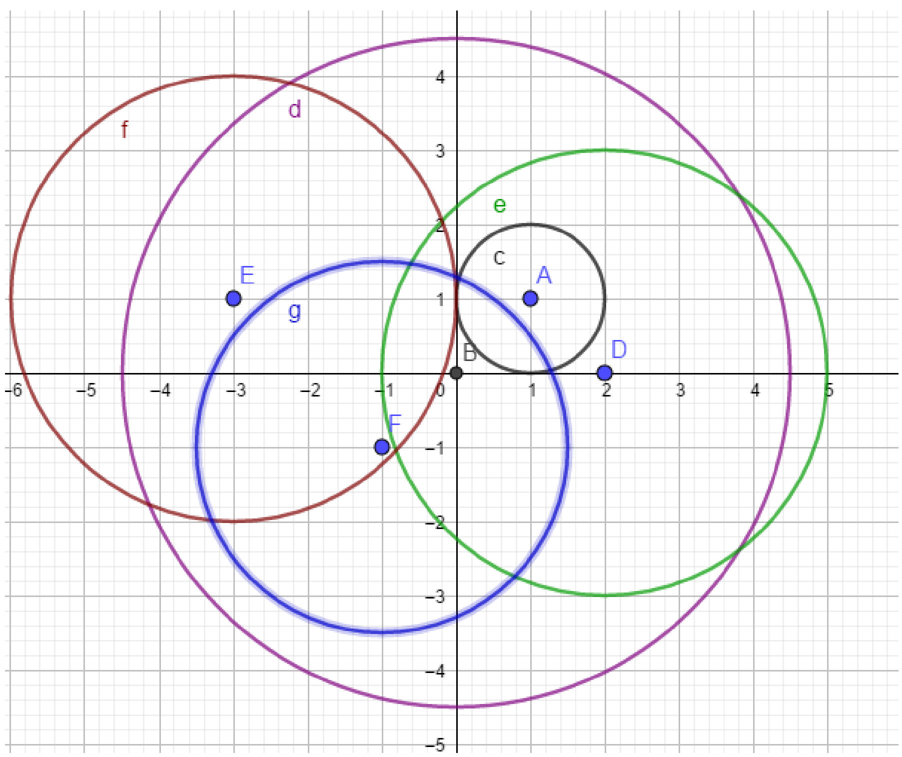
Figura 54

Actividad 3.2

Instrucciones:

1. Lee el enunciado de cada problema y realiza lo que se te solicita.

1. Relaciona las circunferencias que se muestran en la imagen, con la ecuación que le corresponde. Escribiendo en el paréntesis de la derecha la letra de la circunferencia que le corresponde con su ecuación.



( ) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

( ) $(x+3)^2+(y-1)^2=9$

( ) $(x+1)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{4}$

( ) $x^2+y^2=\dfrac{81}{4}$

( ) $(x-2)^2+y^2=9$

2. Realiza la gráfica y calcula la ecuación general de cada una de las circunferencias si en cada caso se conoce lo siguiente:
   a) Centro el origen y radio igual a ½.

   b) Centro el origen y radio igual a 7.

   c) Centro (1, 0) y radio igual a 8.

   d) Centro (-1,2) y radio igual a ½.

   e) Centro (2,3) y radio igual a 3/5.

3. Realiza las operaciones completas y encuentra el centro y radio de las circunferencias dadas por:

   a) $x^2+y^2-2x+4y-44=0$

   b) $x^2+y^2-8x+4y-11=0$

   c) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$

   Realiza la representación gráfica en cada caso.

4. Calcula la ecuación ordinaria de las circunferencias que pasan por los tres puntos dados. Realiza la representación gráfica, señala centro y radio.
   a) A(5, 10), B(0, 5), C(10, 5)
   b) A(0, -10) B(-6, -4) C(-12, -10)
   c) A(3, 12) B(-3, -6) C(-6, -5)

5. La tienda de autoservicio:
   a) ¿En qué sitio debe ubicarse una tienda de autoservicio para que esté a igual distancia de dos conjuntos habitacionales situados en A(1,1), B(2,2), y de una zona residencial en C(-6, 8)?
   b) ¿A qué distancia quedaría la tienda de cada lugar?
   c) Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos que representan a los dos conjuntos habitacionales y la zona residencia.

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 9, lista de cotejo 3.2. Ejercicios de las ecuaciones de la circunferencia

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE IV. Parábola

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Construye mediante la parábola y sus elementos. soluciones creativas a problemáticas del medio que lo rodea.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas
- **Conocimiento (s):** Lugar geométrico de la parábola. / Definición, elementos y trazado de la parábola / Ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice en y fuera del origen.

Lectura previa

Si has descargado la app Geogebra en tu celular, observa, por ejemplo, como queda la representación gráfica de una parábola. Intenta colocar la siguiente función en la entrada de la calculadora gráfica para familiarizarte.

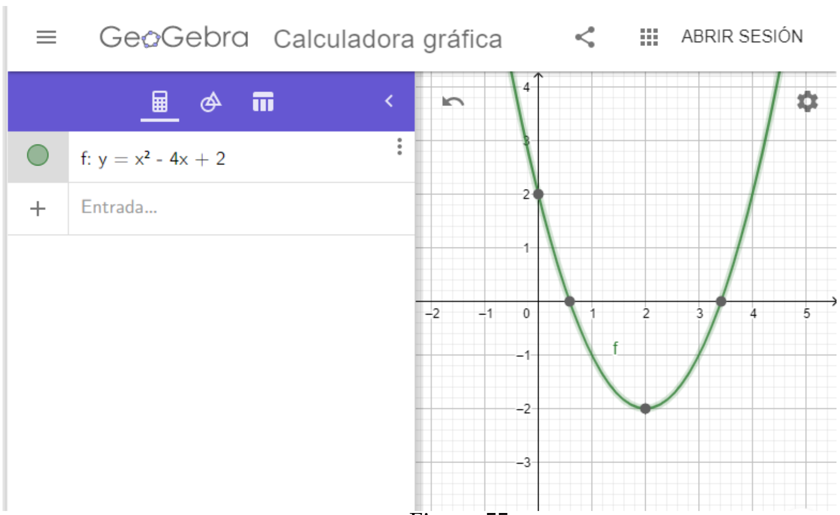


Figura 55

Ahora sí, vamos a entrar al tema que nos ocupa en esta sección, como te darás cuenta, ya hasta aquí sabes que la geometría analítica se trata de representar figuras geométricas con ecuaciones y con figuras trazadas en el plano cartesiano, ya has analizado la ecuación de la recta, ecuación de la circunferencia y ahora es el momento de estudiar la ecuación de la parábola. Para esto déjame mostrarte algunos conceptos importantes que nos servirán para su tratado o estudio.

Secciones Cónicas

Cómo lo vimos en el bloque anterior, las **secciones cónicas**, también denominadas **cónicas**, pueden obtenerse al cortar con un plano dos conos circulares rectos opuestos por el vértice. Al variar la posición del plano obtenemos una parábola, un círculo, una elipse, o una hipérbola, como podrás observar en la figura 56.

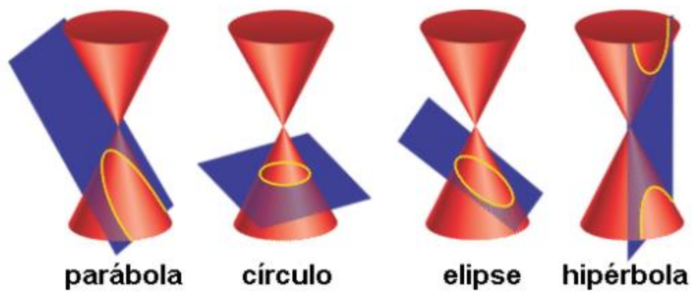


Figura 56 recuperada de Google

Las secciones cónicas fueron bastante estudiadas por los antiguos griegos, quienes descubrieron propiedades que nos permiten plantear sus definiciones en términos de puntos y rectas, como haremos con nuestro análisis de la parábola.

¡Te propongo un reto, vamos a construir una parábola mediante el doblado de papel!

Sigue las indicaciones que te proporciono y observando con atención cada paso mediante las figuras.

Materiales:

- Hoja de papel blanco.
- Una regla
- Lápiz, lapicero.

Pasos:

1. Toma una hoja de papel, y a unos 3 centímetros de uno de los lados menores traza una paralela a éste y sitúa un punto **P** sobre esa recta más o menos que quede centrado.

Figura 57 recuperada de Google.

2. Dobla la hoja de forma que el lado señalado pase por el punto **P**.

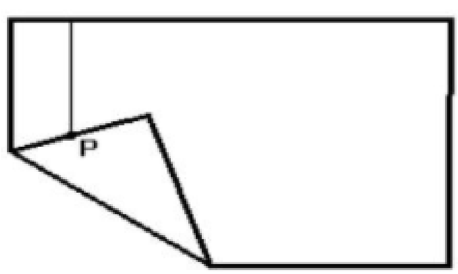


Figura 58 recuperada de Google.

3. Dobla muy bien y marca con un lapicero el doblez. Repite muchas veces y marca siempre el doblez con el lapicero variando el punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro. Observarás cómo se va delimitando una parábola, y va tomando la forma de una sección cónica.

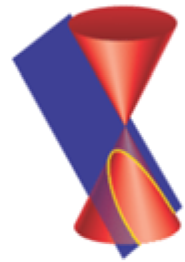


Figura 59 recuperadas de Google.

Analicemos algunas propiedades de nuestra construcción:

- Traza un punto **R**, sobre la parábola formada y une **P** con **R**, después, traza una perpendicular desde el punto **R** hasta el borde de la hoja con el punto **Q**, que le llamaremos **Directriz**.

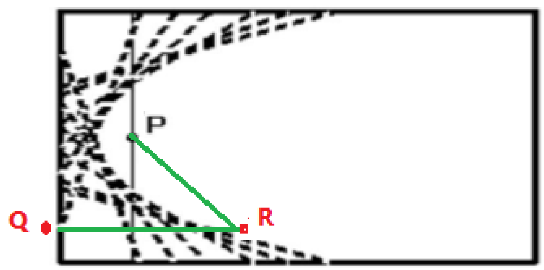


Figura 60 elaboración propia con Imagen recuperada de Google.

Ahora mide la distancia del segmento $\overline{PR}$ y la distancia del segmento $\overline{QR}$. ¿A qué conclusión llegas?

Notarás que ambas distancias son lo mismo (son iguales), esto es una característica muy importante de la construcción de una parábola.

Ahora sitúa el punto **M**, sobre el pico de la parábola, a este punto le llamaremos ***vértice***, también ubica el punto **T**, en el borde de la hoja.

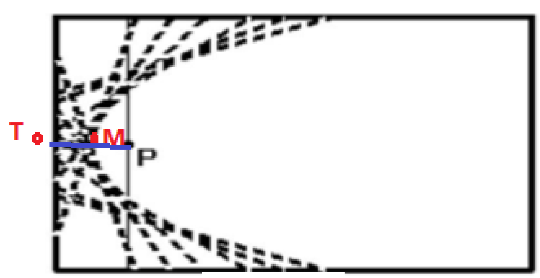


Figura 61

Ahora mide la distancia del segmento $\overline{MP}$ y la distancia del segmento $\overline{TM}$. ¿A qué conclusión llegas?
Del mismo modo que el caso anterior, observarás que las distancias son las mismas (Iguales).

Hasta aquí, ya tienes un concepto muy vago de lo que es una parábola, pero a continuación te presento la definición formal y las propiedades que debe tener.

La parábola

Parábola

La **Parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ tales que su distancia a una recta fija (***L***) llamada **directriz** es la misma que su distancia a un punto fijo llamado **foco** (***F***) que no está sobre la recta.

El punto entre el foco y la directriz se llama **vértice** (*punto medio del segmento que une el foco con el punto donde la directriz intercepta al eje de la parábola*) y la recta que pasa por el foco y el vértice se llama **eje de la parábola**.

En la siguiente figura el **vértice** está en el origen del sistema de coordenadas y el eje de la parábola coincide con el eje X. **La cuerda** que pasa por el foco y es **perpendicular** al eje de la parábola se llama **lado recto,** la distancia entre el foco y el vértice es $\boldsymbol{a}$.

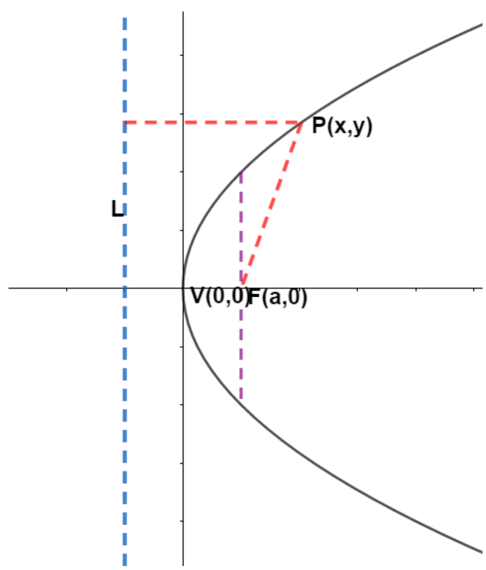


Figura 62

Recuerdas el reto que realizaste anteriormente doblando una hoja de papel, ahora ya puedes darte cuenta de que una parábola tiene una definición matemática y tiene elementos importantes que lo hacen su razón de ser, te sugiero vuelvas a leer la definición y te familiarices con cada uno de los términos y elementos que, desde ahora en adelante vamos a trabajar.

I. Formas de la ecuación de la parábola

a) Primera forma

Ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen y el eje es uno de los ejes coordenados (*La parábola puede abrir hacia arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda*):

Por definición $\boldsymbol{P(x, y)}$ es un punto de la parábola si y solo si, $\overline{\boldsymbol{FP}} = \overline{\boldsymbol{PL}}$ (esta condición es una de las que analizaste en el reto del doblado de una hoja), en donde:

$\overline{\boldsymbol{FP}} = \sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{0})^2}$ Fórmula de la distancia entre dos puntos.
$\overline{\boldsymbol{PL}} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},$ ya que del vértice al foco es la misma distancia que del vértice a la directriz (Otra de las condiciones que analizaste en el reto del doblado del papel)

Sustituyendo en la condición geométrica queda:

$$\overline{\boldsymbol{FP}} = \overline{\boldsymbol{PL}}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a$$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\boldsymbol{y^2 = 4ax}$$

$$\boldsymbol{y^2 - 4ax = 0}$$

Fórmula que corresponde a una parábola horizontal con vértice en el origen.

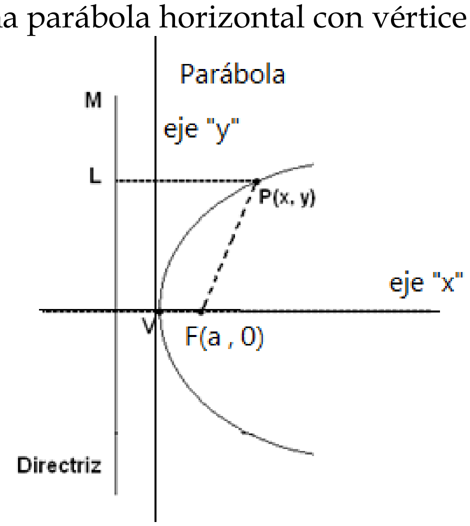


Figura 63

De la forma de la ecuación se deduce que la parábola es simétrica con respecto al eje X.

En donde el foco es $\boldsymbol{F(a,0)}$ y la ecuación de la directriz es $\boldsymbol{x = -a}$.

- Si $\boldsymbol{a < 0}$, es decir, que sea negativo, el foco está a la izquierda de la directriz.
- ***Si*** $\boldsymbol{a > 0}$, es decir, que sea positivo, el foco a la derecha de la directriz.
- La longitud del lado recto es $\boldsymbol{L = |4a|}$.

En el caso de que la parábola su vértice este en el origen y el eje Y coincide con el eje de la parábola su ecuación es:

$$\boldsymbol{x^2 = 4ay}$$

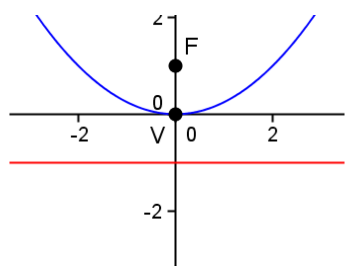
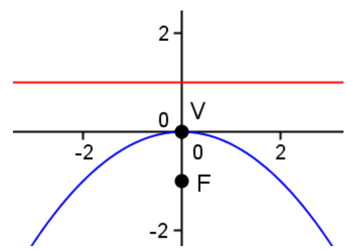
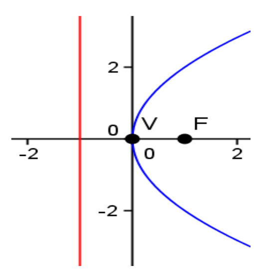
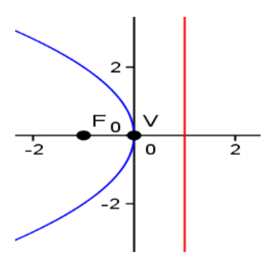
$$\boldsymbol{x^2 - 4ay = 0}$$

De la forma de la ecuación se deduce que la parábola es simétrica con respecto al eje Y.

En donde le foco es $\boldsymbol{F(0,a)}$**,** la ecuación de la directriz es $\boldsymbol{y = -a}$.

- Si $\boldsymbol{a > 0}$, es decir, positivo, el foco está por encima de la directriz.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$, es decir, negativo, el foco está por debajo de la directriz.
- La longitud del lado recto es $\boldsymbol{L = |4a|}$.

RESUMEN DE LAS FORMA DE LA PARÁBOLA ANALIZADO ANTERIORMENTE
PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN $\boldsymbol{V(0,0)}$

<table>
<tr><th>Ecuación, foco, directriz</th><th>Gráfica para $\boldsymbol{a > 0}$</th><th>Gráfica para $\boldsymbol{a < 0}$</th></tr>
<tr><td>$$\boldsymbol{x^2 = 4ay}$$
$$\boldsymbol{y = \frac{1}{4a}x^2}$$
Foco: $\boldsymbol{F(0,a)}$
Directriz: $\boldsymbol{y = -a}$
Lado recto: $\boldsymbol{|4a|}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th>Ecuación, foco, directriz</th><th>Gráfica para $\boldsymbol{a > 0}$</th><th>Gráfica para $\boldsymbol{a < 0}$</th></tr>
<tr><td>$$\boldsymbol{y^2 = 4ax}$$
$$\boldsymbol{x = \frac{1}{4a}y^2}$$
Foco: $\boldsymbol{F(a,0)}$
Directriz: $\boldsymbol{x = -a}$
Lado recto: $\boldsymbol{|4a|}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Ejemplo 1

Hallar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola $\boldsymbol{3y^2 = 8x}$.

<u>Solución:</u>
En este primer ejemplo nos piden encontrar los elementos de una parábola, fíjate en la tabla 4 ahí está resumido las formas de la parábola. Además, si observamos con mucha atención, vemos que la variable y, está elevado al cuadrado, eso nos indica que la parábola abrirá hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo del signo del valor del parámetro "$\boldsymbol{a}$".

La ecuación de la parábola es $\boldsymbol{y^2 = 4ax}$, si despejamos y^2 en la ecuación de la parábola dada:
$\boldsymbol{3y^2 = 8x}$.
queda $y^2 = \frac{8}{3}x$

Deducimos que $4a = \frac{8}{3}$, lo cual implica que $a = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
El foco será el punto $\boldsymbol{F(a,0)}$, por tanto, el foco es $F\ (\frac{2}{3}, 0)$.
La ecuación de la directriz es Directriz: $\boldsymbol{x = -a}$, por lo tanto $x = -\frac{2}{3}$.

Para hallar la longitud del lado recto determinamos el valor de $|4a| = 4(\frac{2}{3}) = \frac{8}{3}$.

Representación gráfica del ejemplo 1.

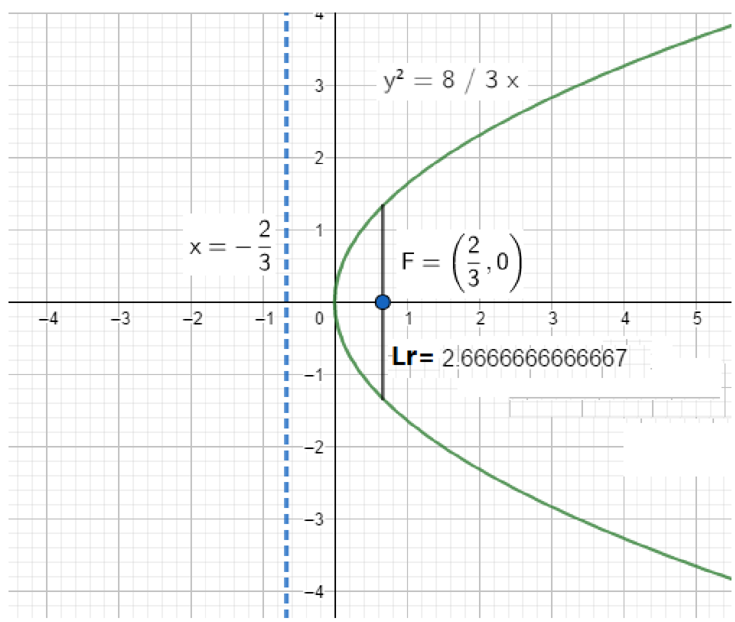


Figura 64

Como pudiste observar el parámetro que nos ayudó a encontrar los elementos de la parábola fue el valor de "$\boldsymbol{a}$", ya que este valor aparece en todos ellos. Además, su signo es positivo, por eso la parábola abrió hacia la derecha.

A modo de repaso y análisis, se te proporciona realices la siguiente actividad.

Actividad 4.1.1

Instrucciones:

1. Llena la siguiente tabla con las indicaciones que se te piden en cada celda, analizando detenidamente los datos proporcionados en el ejercicio que a continuación se te da.

Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F\left(0,-\frac{4}{3}\right)$ y su directriz la recta $y-\frac{4}{3}=0$. Hallar la longitud del lado recto.

<table>
<tr><th>Datos</th><td rowspan="2">Según los datos proporcionados, revisa la tabla 4 y escribe la forma que corresponderá a la parábola en cuestión.

Forma:</td><td rowspan="2">Según los datos dados, ¿Cuál es el valor del parámetro "$\boldsymbol{a}$"?

$\boldsymbol{a}=$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">• Foco $F\left(0,-\frac{4}{3}\right)$

• Directriz

$y-\frac{4}{3}=0$</td></tr>
<tr><td>De la forma de la parábola y del valor del parámetro "$\boldsymbol{a}$", encuentra la ecuación correspondiente:

$\boldsymbol{x^2}=(\qquad)\boldsymbol{y}$</td><td>Escribe la fórmula de la longitud del lado recto para este caso.</td></tr>
<tr><td>Sin realizar la gráfica, escribe en qué dirección abrirá la parábola y diga por qué.</td><td>Realiza el desarrollo matemático para encontrar la longitud del lado recto.

$\boldsymbol{Lr}=$</td></tr>
</table>

Actividad 4.1.2

Instrucciones:

1. Realiza la tabulación de la ecuación de la parábola y representa su gráfica en el plano cartesiano. Guíate en el ejemplo y continua el procedimiento que ahí se muestra.

Representa gráficamente la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 = 5y}$

Tabulación

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	**7.2**	**5**	**3.2**										

Procedimiento para el llenado de la tabla:

Para $x = -6$

$\boldsymbol{x^2 = 5y}$

$\boldsymbol{(-6)^2 = 5y}$

$\boldsymbol{36 = 5y}$

$\boldsymbol{5y = 36}$

$\boldsymbol{y = \frac{36}{5}}$

$\boldsymbol{y = 7.2}$

Para $x = -5$

$\boldsymbol{x^2 = 5y}$

$\boldsymbol{(-5)^2 = 5y}$

$\boldsymbol{25 = 5y}$

$\boldsymbol{5y = 25}$

$\boldsymbol{y = \frac{25}{5}}$

Para $x = -4$

$\boldsymbol{x^2 = 5y}$

$\boldsymbol{(-4)^2 = 5y}$

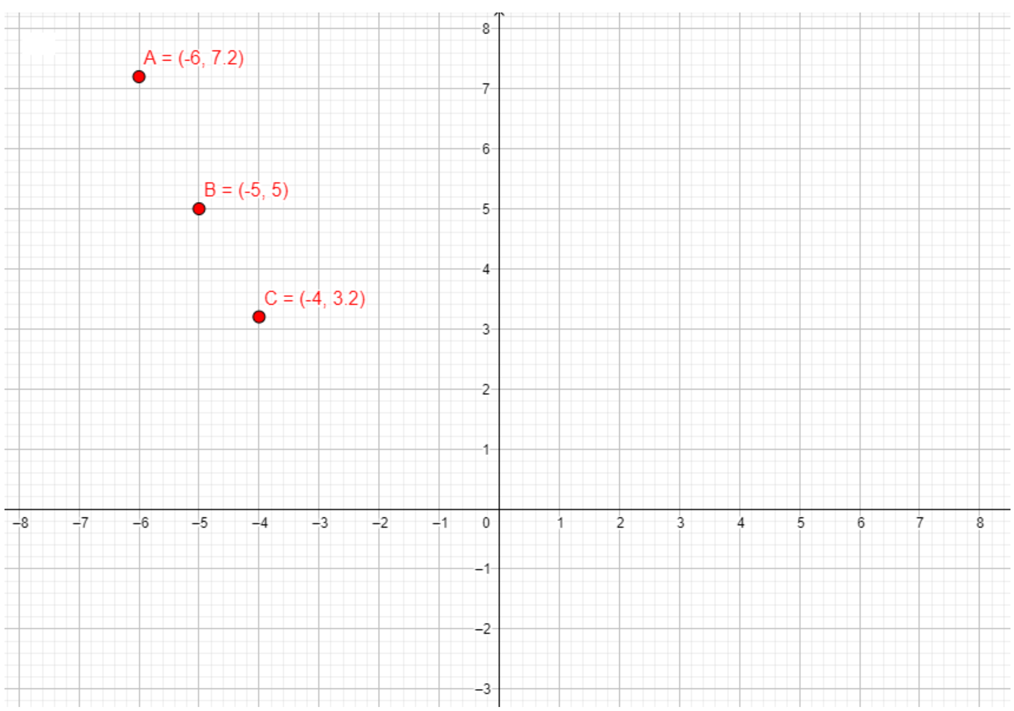
$\boldsymbol{16 = 5y}$

$\boldsymbol{5y = 16}$

$\boldsymbol{y = \frac{16}{5}}$

Continua este procedimiento hasta llenar por completo la tabla.

Posteriormente, sitúa en el plano cartesiano, cada una de las parejas de puntos de la tabla, después, con tu lápiz, une los puntos cuidadosamente para formar la gráfica de la parábola.



Muy bien, si lograste realizar las actividades anteriores muchas felicidades, estas progresando; ahora te muestro un ejemplo que ha sido muy estudiado al momento de analizar la ecuación de la parábola, pero antes te presento algunos conceptos que necesitamos para ello.

Ecuación de la tangente en un punto de la parábola

- **Recta:** la línea recta se define como una sucesión de puntos infinitos, que conservan una misma inclinación (pendiente). Una línea recta no tiene inicio ni tiene fin, es infinita.

Figura 65

- **Recta Tangente**: Así se llama a la línea recta que tiene sólo un punto en común (contacto) con la circunferencia.

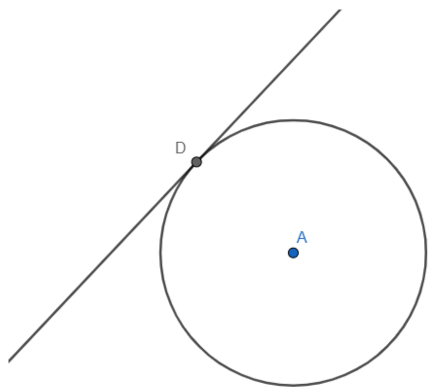


Figura 66

En la imagen anterior, puedes observar que la recta es tangente a la circunferencia, ya que solamente toca en el punto D a esta.

Con estos conceptos en mente ya podemos trabajar con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $\boldsymbol{y^2 - 4x = 0}$, *para el punto de contacto* $\boldsymbol{P_t(1,2)}$.

Solución:

Si te fijas con atención, notarás que nos dan las coordenadas del punto de contacto entre la recta y la parábola, de ahí la definición de la recta tangente (*recuerda la definición de recta tangente, pero en la circunferencia, en nuestro caso en la parábola*)

Primero encontremos el valor de $\boldsymbol{a}$.

Recurre a la tabla 4 la cual te ayudará a identificar la forma de la ecuación de la parábola y de ahí encontrar sus elementos. En este caso será de la forma: $y^2 = 4\mathbf{a}x$, esto lo lograremos despejando a $\mathbf{y^2}$ de la ecuación que nos proporcionan $\mathbf{y^2 - 4x = 0.}$

$y^2 = 4x$
$4a = 4$
$a = 4/4$
$\boldsymbol{a} = 1$

Aplicando la ecuación de la tangente en un punto tenemos $\boldsymbol{y_1 y = 2a(x + x_1)}$ sustituyendo los valores en la ecuación queda:

$\boldsymbol{P_t(1, 2)}$
$\boldsymbol{a} = 1$

$(2)y = 2(1)(x + 1)$
$2y = 4(x + 1)$
$2y = 2x + 2$ quedando:
$\boldsymbol{x - y + 1 = 0}$ que es la ec

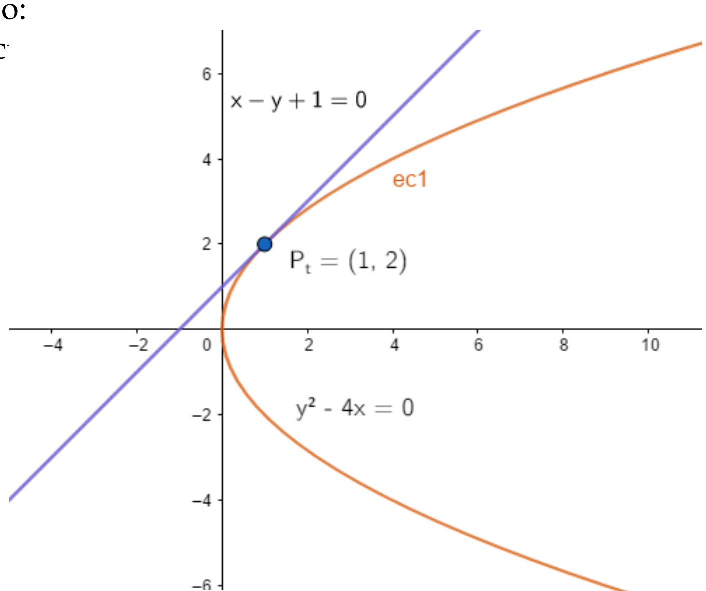


Figura 67

Ves que fácil es, no debes olvidar que la ecuación de una recta tangente a una parábola en un punto dado es: $\boldsymbol{y_1 y = 2a(x + x_1)}$.

Actividad 4.1.3

Instrucciones:

1. Resuelve correctamente en tu libreta los siguientes problemas.
2. Gráfica las ecuaciones de preferencia en una hoja cuadriculada.
3. Utiliza Geogebra para comprobar tus resultados.

I. Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen que satisface la condición dada.

a. Foco en (4,0)
b. Foco en (-3,0)
c. Directriz $x - 6 = 0$
d. Directriz $y + 4 = 0$
e. La longitud del lado recto es 12 y abre hacia abajo

II. Para cada una de las siguientes parábolas con vértice en el origen, halla las coordenadas del foco, el lado Recto y la ecuación de la directriz.

a) $2y^2 = 4x$
b) $y^2 = -12x$
c) $y^2 = x$
d) $4y^2 = -16x$
e) $x^2 = 12y$

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 10

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Construye mediante la parábola y sus elementos. soluciones creativas a problemáticas del medio que lo rodea.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas
- **Conocimiento (s):** Lugar geométrico de la parábola. / Definición, elementos y trazado de la parábola / Ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice en y fuera del origen.

Continuando con el estudio de la parábola, vamos a analizar la segunda forma de representación de la ecuación de una parábola.

b) Segunda forma

En esta sección, vamos a estudiar a la parábola, pero cuando su vértice (piquito) ya no se encuentra en el origen, ahora puede estar en alguno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, vamos a observar que aparecen nuevos parámetros que debemos conocer o determinar antes de poder encontrar su ecuación y realizar el trazado de su gráfica. Pon mucha atención en lo que a continuación sigue.

Ecuación general de la Parábola con vértice en $\boldsymbol{V(h,k)}$ y eje paralelo respectivamente al eje $\boldsymbol{x}$ o al eje $\boldsymbol{y}$.

(I). La ecuación general de la parábola con eje paralelo al eje $\boldsymbol{x}$ es:

$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}=\boldsymbol{4a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$ *Observa que ahora aparecen dos nuevos parámetros la "k" y la "h".*

Se desarrolla el binomio al cuadrado y se realizan las operaciones indicadas.

$$\boldsymbol{y^2-2ky+k^2=4ax-4ah}$$

Se transponen todos los términos de la ecuación en el miembro derecho.

$$\boldsymbol{y^2-4ax-2ky+k^2+4ah=0}$$

Se agrupan las constantes numéricas y literales y se les asigna una nueva variable.

En donde:

$$\boldsymbol{D=-4a}$$

$$\boldsymbol{E=-2k}$$

$$\boldsymbol{F=k^2+4ah}$$

De este modo se obtiene la ecuación general de la parábola con vértice en el punto $\boldsymbol{V(h,k)}$ y con eje paralelo respectivamente al eje x.

$$\boldsymbol{y^2 + Dx + Ey + F = 0.}$$

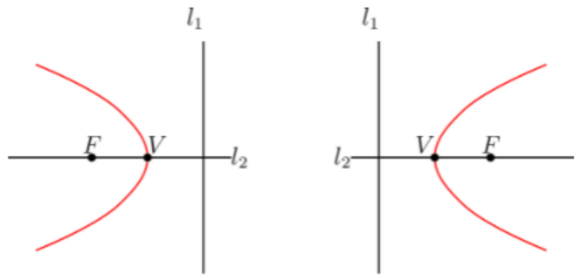


Figura 68 recuperada de Google.

Del modo similar, obtenemos la ecuación general de la parábola con eje paralelo al eje y.

(II). La ecuación general de parábola con eje paralelo al eje y es:

$\boldsymbol{(x - h)^2 = 4a(y - k)}$ *Observa que ahora aparecen dos nuevos parámetros la "k" y la "h".*

Se desarrolla el binomio al cuadrado y se realizan las operaciones indicadas.

$$\boldsymbol{x^2 - 2hx + h^2 = 4ay - 4ak}$$

Se transponen todos los términos de la ecuación en el miembro derecho.

$$\boldsymbol{x^2 - 2hx - 4ay + h^2 + 4ak = 0}$$

Se agrupan las constantes numéricas y literales y se les asigna una nueva variable.

En donde:

$\boldsymbol{D = -2h}$

$\boldsymbol{E = -4a}$

$\boldsymbol{F = h^2 + 4ak}$

De este modo se obtiene la ecuación general de la parábola con vértice en el punto $\boldsymbol{V(h,k)}$ y con eje paralelo al eje y.

$$\boldsymbol{x^2 + Dx + Ey + F = 0.}$$

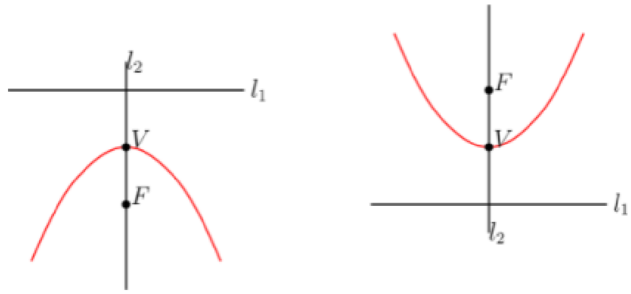


Figura 69 recuperada de Google.

RESUMEN DE LAS FORMA DE LA PARÁBOLA ANALIZADO ANTERIORMENTE

PARÁBOLA CON VÉRTICE EN $V(h,k)$ Y EJE PARALELO RESPECTIVAMENTE AL EJE x O AL EJE y.

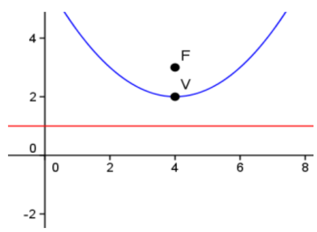
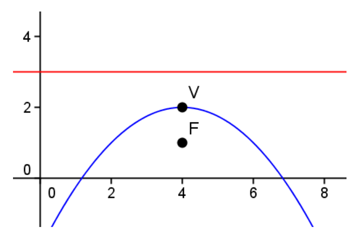
PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL PUNTO $V(h,k)$ [ECUACIÓN ORDINARIA]

Tabla 5

<table>
<tr><th>Ecuación, foco, directriz</th><th>Gráfica para $a > 0$</th><th>Gráfica para $a < 0$</th></tr>
<tr><td>$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
$y = ax^2 + bx + c$

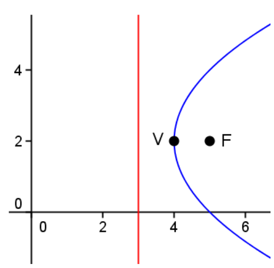
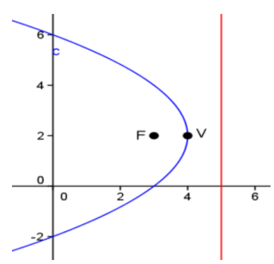
Forma General
$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h,k)$
Foco: $F(h, k+a)$
Directriz: $y = k - a$

Longitud del lado recto
$Lr = |4a|$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>Ecuación, foco, directriz</th><th>Gráfica para $a > 0$</th><th>Gráfica para $a < 0$</th></tr>
<tr><td>$(y-k)^2 = 4a(x-h)$
$x = ay^2 + by + c$

Forma General
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h,k)$
Foco: $F(h+a, k)$
Directriz: $x = h - a$

Longitud del lado recto
$Lr = |4a|$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ejemplos ilustrativos

Vamos a resolver algunos ejemplos de la ecuación de una parábola con todo lo analizado anteriormente, pon mucha atención, en caso de no quedar claro, te sugiero que repases nuevamente la teoría y analices tantas veces sea necesario los ejemplos.

Ejemplo 1

Reduzca de la ***forma general*** *a la segunda* ***forma ordinaria*** *y determine el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y del eje, así como el lado recto, de la siguiente parábola:* $\mathbf{4y^2 - 48x - 20y = 71}$.

<u>Solución:</u>

Primero nos fijaremos en la variable que está elevado al cuadrado y observaremos cuál es su coeficiente, en este caso la variable elevada al cuadrado es la y y su coeficiente es 4, entonces debemos dividir toda la ecuación entre el factor 4, esto con el propósito de despejar al y^2.

$$\mathbf{4y^2 - 48x - 20y = 71}$$

$$\mathbf{\frac{4y^2}{4} - \frac{48x}{4} - \frac{20y}{4} = \frac{71}{4}}$$

$$y^2 - 12x - 5y = \frac{71}{4}$$

Seguidamente, agrupamos en un paréntesis los términos que contengan a la variable y, y a los que no, los transponemos del lado derecho de la ecuacion, en nuestro caso, la variable x.

$$\mathbf{(y^2 - 5y) = 12x + \frac{71}{4}}$$

Posteriormente nos centramos en la agrupación, donde se encuentra la variable $\boldsymbol{y}$ y completamos el trinomio cuadrado perfecto.

$$\mathbf{(y^2 - 5y) = 12x + \frac{71}{4}}$$

Aquí, nos centramos en el factor lineal $\mathbf{5y}$, tomamos su coeficiente que es 5, lo dividimos entre dos y lo elevamos al cuadrado:

$$\mathbf{\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}}$$

El resultado así obtenido lo agregamos en la agrupación, y también en el lado derecho de la ecuación para no afectar la igualdad, quedando de esta forma:

$$\left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = 12x + \frac{71}{4} + \frac{25}{4}$$

Ahora, se factoriza la agrupación y se reduce los términos semejantes en el lado derecho de la ecuación, en este caso la factorización que haremos será la factorización de un trinomio cuadrado perfecto (TCP). $y^2 - 5y + \frac{25}{4}$

$$\begin{array}{ccc} y^2 & -5y + & \frac{25}{4} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{y^2} & & \sqrt{\frac{25}{4}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & & \frac{5}{2} \end{array}$$

Para realizar la factorización, se extrae la raíz cuadrada del primero y tercer término, estas raíces se colocan en un paréntesis separado del signo del segundo término, en este caso será el signo negativo, después se eleva al cuadrado.

La factorización realizada queda de esta manera:

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + \frac{71}{4} + \frac{25}{4}$$

Ahora, en el miembro derecho de la ecuación, se suman las fracciones y se realiza la división.

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + \frac{96}{4}$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24$$

Después, se factoriza el miembro derecho de la ecuación.

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$$

Observemos bien en lo que hemos llegado hasta ahora y tomamos en cuenta la tabla 5, notaremos que se parece a la forma de la ecuación de la parábola con eje paralelo al eje x.

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$$

De esta manera, podemos encontrar los valores de los siguientes parámetros:

$k = \frac{5}{2}$ *recuerda multiplicar los signos del parámetro k.*

$h = -2$

$4a = 12 \quad \rightarrow \quad$ despejando a nos queda, $a = \frac{12}{4} = 3$.

De aquí determinamos lo que nos pide el ejercicio (revisa nuevamente la tabla 5):

- El vértice de coordenadas $\boldsymbol{V(h, k)}$ por lo tanto, $\boldsymbol{V(-2, \frac{5}{2})}$.
- La distancia del vértice al foco es $\boldsymbol{4a = 12}$ por lo tanto $\boldsymbol{a = 3}$.
- Las coordenadas del foco son $\boldsymbol{F(h + a, k)}$ por lo tanto, $\boldsymbol{F(-2 + 3, \frac{5}{2})} \rightarrow \boldsymbol{F(1, \frac{5}{2})}$
- La ecuación de la directriz es $\boldsymbol{x = h - a}$ entonces, $\boldsymbol{x = -2 - 3 = -5}$ que nos da $\boldsymbol{x + 5 = 0}$.
- La ecuación del eje es $\boldsymbol{y = \frac{5}{2}}$ o $\boldsymbol{y - \frac{5}{2} = 0}$.
- La longitud del lado recto es igual a $\boldsymbol{Lr = |4a| = |4(3)| = |12| = 12}$.

De los datos anteriores nos queda la gráfica de la siguiente manera:

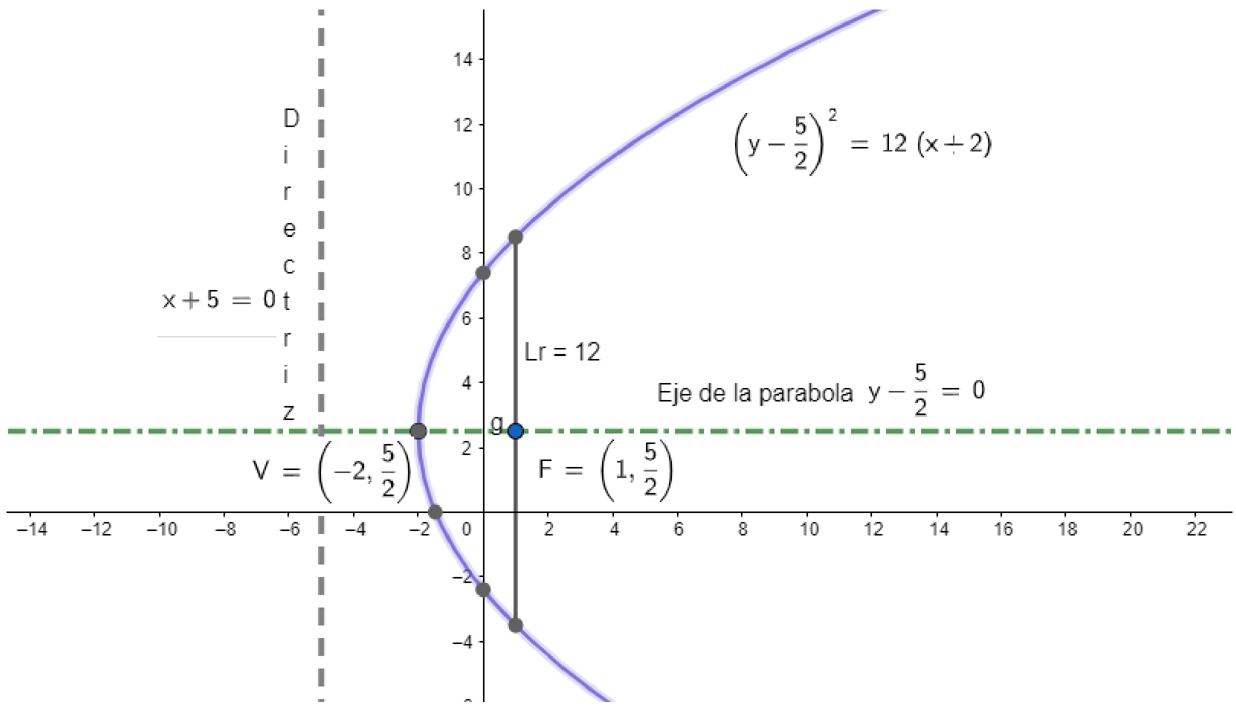


Figura 70

Parábola que pasa por 3 puntos.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje $\boldsymbol{x}$ y pasa por los puntos $\boldsymbol{A(0,0)}$, $\boldsymbol{B(8,-4)}$ y $\boldsymbol{C(3,1)}$.

Solución:

Para este ejercicio ya tenemos un dato muy importante, el cual es la forma de la parábola, entonces, la ecuación general de la parábola que estamos buscando será paralela al eje $\boldsymbol{x}$, revisa la tabla 4.2 para obtener dicha forma.

$\boldsymbol{y^2+Dx+Ey+F=0}$ (*dato obtenido de la tabla 5*)

Como los puntos dados pertenecen a la parábola implica que deben satisfacer esta ecuación, por lo tanto, sustituiremos las coordenadas de dichos puntos en la ecuación para obtener un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas así:

$$\boldsymbol{y^2+Dx+Ey+F=0}$$

Para el punto $\boldsymbol{A(0,0)}$ queda la ecuación general: $\boldsymbol{(0)^2+(0)D+(0)E+F=0}$ y resulta $\boldsymbol{F=0}$

Para el punto $\boldsymbol{B(8,-4)}$ queda la ecuación general: $\boldsymbol{(-4)^2+(8)D+(-4)E+F=0}$

$\boldsymbol{16+8D-4E+F=0}$

Despejando el termino independiente tendremos: $\boldsymbol{8D-4E+F=-16}$

Para el punto $\boldsymbol{C(3,1)}$ queda la ecuación general: $\boldsymbol{(1)^2+(3)D+(1)E+F=0}$

$\boldsymbol{1+3D+E+F=0}$

Despejando el termino independiente tendremos; $3D+E+F=-1$

Como el valor de $\boldsymbol{F=0}$**,** sustituimos este valor en las dos ecuaciones restantes y tendremos:

$8D-4E+F=-16$, quedará $\boldsymbol{8D-4E=-16}$:

$3D+E+F=-1$, quedará: $\boldsymbol{3D+E=-1}$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas nos queda:

Multiplicamos la segunda ecuación por el factor 4 para obtener coeficientes iguales del factor **E**.

$$\begin{array}{r|l} 8D - 4E = -16 & \\ 3D + E = -1 & (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8D \cancel{-4E} = -16 \\ 12D \cancel{+4E} = -4 \\ \hline 20D \quad = -20 \\ \quad D = -20/20 \\ \quad D = -1 \end{array}$$

Después, sustituimos el valor de $\boldsymbol{D = -1}$, en cualquiera de las dos ecuaciones y tendremos el valor de $\boldsymbol{E}$. Para este caso, lo sustituimos en la segunda ecuación, que es la más sencilla.

$$\begin{gathered} \boldsymbol{3D + E = -1} \\ \boldsymbol{3(-1) + E = -1} \\ \boldsymbol{-3 + E = -1} \\ \boldsymbol{E = -1 + 3} \\ \boldsymbol{E = 2} \end{gathered}$$

Por tanto, nos queda que: $\boldsymbol{D = -1}$**,** $\boldsymbol{E = 2}$ **y** $\boldsymbol{F = 0}$**.**

Ahora, sustituimos estos valores en la forma general de la parábola y resulta:

$$\boldsymbol{y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

$\boldsymbol{D = -1}$

$\boldsymbol{E = 2}$

$\boldsymbol{F = 0}$

$$\boldsymbol{y^2 + (-1)x + (2)y + 0 = 0}$$

$$\boldsymbol{y^2 - x + 2y = 0}$$

Que es la ecuación de la parábola buscada.

Representación gráfica de la parábola.

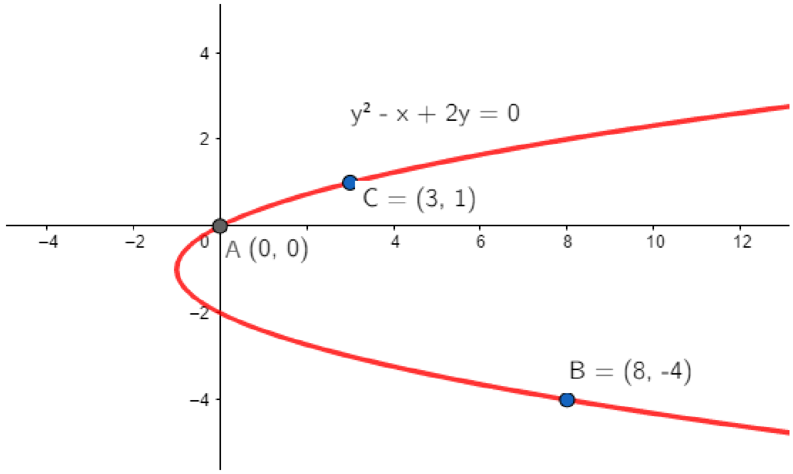


Figura 71

Ahora te toca a ti resolver algunos ejercicios, te deseo éxito, en caso de tener alguna duda, vuelve a repasar los ejemplos anteriores.

Actividad 4.2.1

Instrucciones:

1. Reduzca de la forma general a la segunda forma ordinaria y determine el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y del eje, así como el lado recto, de la siguiente parábola:

$$\mathbf{9x^2 + 72y + 24x + 16 = 0.}$$

A continuación, se te dan los pasos de la resolución de este ejercicio y deberás llenar los espacios vacíos para que tome sentido la expresión y llegues al resultado esperado.

$$\mathbf{9x^2 + 72y + 24x + 16 = 0}$$

A continuación, toda la ecuación se debe dividir por un número, llena los cuadros con ese número y realiza la división si el resultado es exacto, en caso contrario, deja expresado en forma de fracción.

$$\frac{\mathbf{9x^2}}{} + \frac{\mathbf{72y}}{} + \frac{\mathbf{24x}}{} + \frac{\mathbf{16}}{} = \frac{\mathbf{0}}{}$$

$$x^2 + 8y + \frac{24x}{9} + \frac{16}{9} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{24}{9}x\right) = -8y - \frac{16}{9}$$

Encuentra el termino faltante en el siguiente paso para que la expresión quede completada en un trinomio cuadrado perfecto (TCP).

$$\left(x^2 + \frac{24}{9}x + \boxed{}\right) = -8y - \frac{16}{9} + \boxed{}$$

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -8y$$

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -8(y - 0)$$

Revisa la tabla 5 y escribe en la línea, cuál es la forma que tomo nuestra ecuación:

____

Escribe cuales son los valores de los siguientes parámetros.

$k =$ ______

$h =$ ______

$4a =$ _______

$a =$ _______

Determina y escribe en la línea lo que se te solicita (*Se sugiere revisar la tabla 5*).

El vértice de coordenadas $\boldsymbol{V(h, k)}$ por lo tanto, $\boldsymbol{V}$(____ , ____).

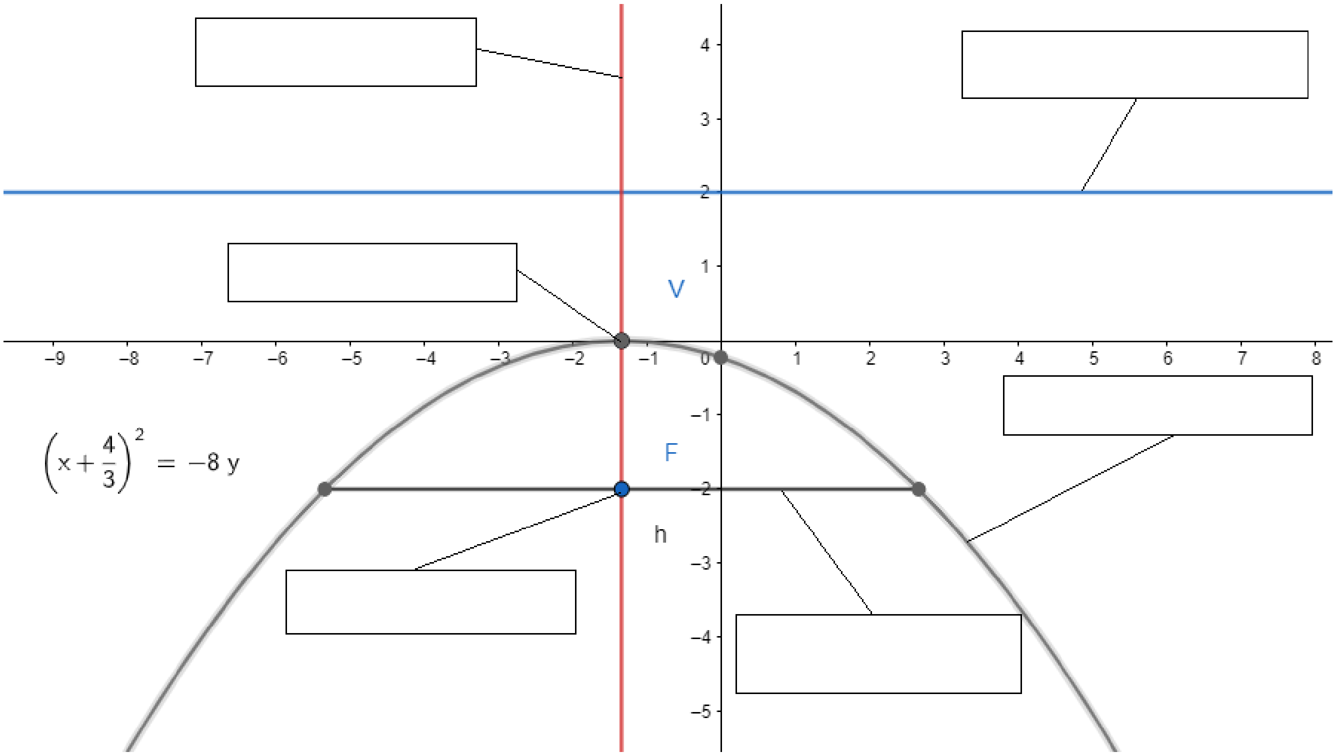
Las coordenadas del foco son _____________ por lo tanto, $\boldsymbol{F}$(_____ , _____).

La ecuación de la directriz es: $\boldsymbol{y = k - a}$, por tanto, $\boldsymbol{y} =$ ________________

La ecuación del eje es: ____________ , por tanto, $\boldsymbol{x} +$ _____ $=$ _____.

La longitud del lado recto es igual a $\boldsymbol{Lr} = |$_____$|$, por lo tanto $\boldsymbol{Lr} =$ _____.

Ahora se te proporciona la gráfica del ejercicio, escribe en los recuadros los nombres de las partes o elementos que se indican.



Actividad 4.2.2

Instrucciones:

4. Resuelve correctamente en tu libreta los siguientes problemas.
5. Gráfica las ecuaciones de preferencia en una hoja cuadriculada.
6. Utiliza Geogebra para comprobar tus resultados.

III. Halla la ecuación de la parábola en su forma GENERAL con vértice (h,k) que satisface la condición dada.

a. V(-2, 3), F(-2, -2)
b. V(2, 3), F(8, 3)
c. V(2, 1), el lado recto es igual a 12 y abre hacia la izquierda.

IV. Halla las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz para las siguientes parábolas

a. $(y - 2)^2 = -12(x - 1)$
b. $(x + 3)^2 = 16(y - 1)$
c. $(x + 4)^2 = -8(y + 1)$

V. Para cada una de las siguientes parábolas con V(h,k) , halla las coordenadas del vértice, las coordenadas foco, el lado Recto, la ecuación de la directriz y del eje focal.

f) $y^2 + 8y + 4x - 20 = 0$
g) $x^2 + 6x + 2y + 4 = 0$
h) $2y^2 + 24y - 8x - 16 = 0$
i) $3x^2 - 24x + 18y - 24 = 0$

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 11

PARA REFLEXIONAR UN POCO

Para poder hablar por celular y para ver los canales de televisión que tanto te gustan, se necesita de la parábola, esto se debe, a que las antenas que reciben estas señales de los satélites, deben ser parabólicas, para que por las propiedades que tienen este objeto matemático, se reflejan los rayos a un punto que es el que conocemos como foco de la parábola.

Operación de una antena parabólica

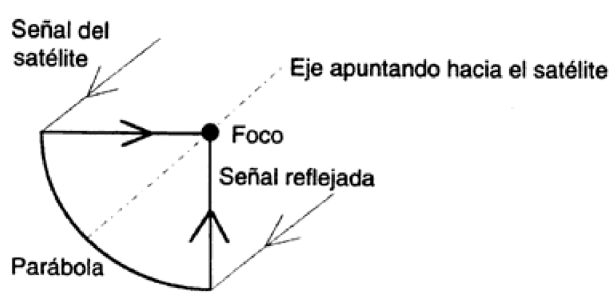


Figura 72 tomada de internet http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/149/htm/sec_8.htm

Para la construcción de los satélites es muy importante tener presente la parábola ya que ellos también deben recibir esos rayos de información y al igual que en las antenas, las propiedades de la parábola son de gran ayuda para poder hacer este proceso.

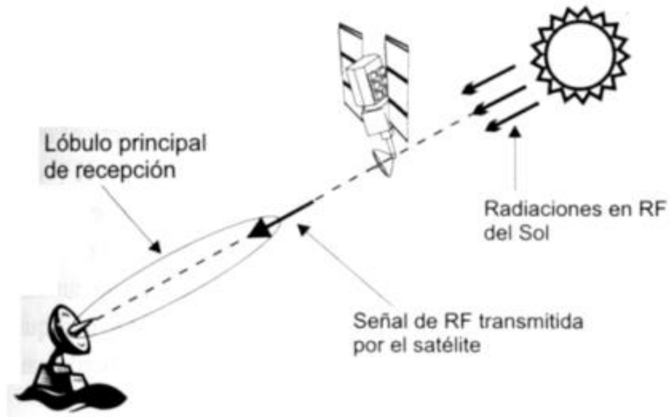


Figura 73 tomada de internet
https://www.urbe.edu/info-consultas/web-profesor/12697883/articulos/Comunicaciones%20Satelites%20y%20Celulares/Teoria%20de%20las%20Telecomunicaciones.pdf

Otro ejemplo se encuentra en los micrófonos parabólicos este no refleja los rayos, pero sí refleja las ondas de sonido y con la misma idea que vimos en la parábola ayuda a que todas las ondas se concentren en un punto y se escuche más nítido en esto también lo usan normalmente las cadenas de televisión.

Del mismo modo para los telescopios también es muy importante la parábola, su curva particular ayuda a ampliar la visión de quien ve por un lente con esta forma y de esta manera ver muy lejos, con instrumentos de este tipo es cómo se han podido ver estrellas que se encuentran tan lejos de donde estamos debido a que se toma en cuenta esta reflexión de la luz.

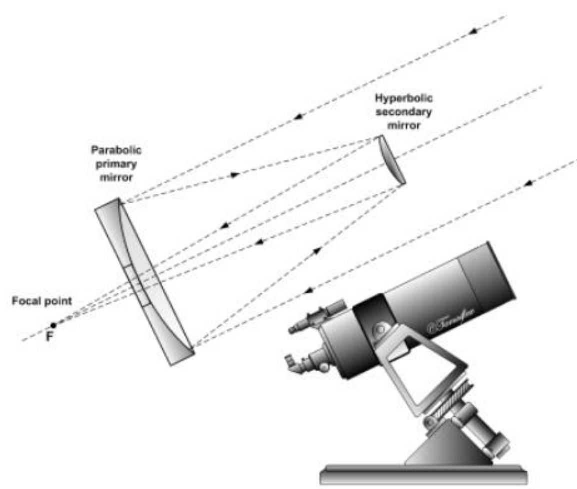


Figura 74 tomada de internet https://w3.ual.es/~vruiz/Docencia/Apuntes/Transduction/Video/index.html

Existen también hornos solares que tienen forma de parábola, se reflejan los rayos de calor emitidos por el sol y como ya vimos todos esos rayos se reflejan en un foco, si pones en el foco una olla, todos los rayos calentarán rápidamente tu comida debido a que la luz se refleja sobre un espejo en forma de parábola y así la luz es más intensa en dicho punto.

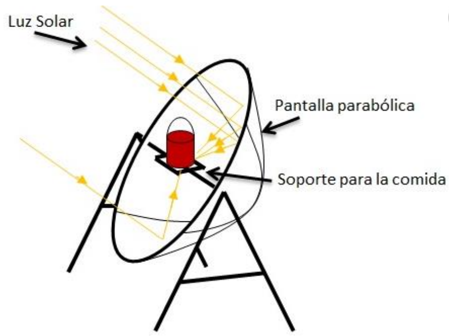


Figura 75 tomada de internet https://www.goconqr.com/pt-PT/p/4055350?dont_count=true&frame=true&fs=true

En general hay muchos objetos de nuestra vida que utilizan la parábola para su funcionamiento.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE V. Elipse

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea la elipse y sus elementos para solucionar colaborativamente problemáticas en su vida cotidiana.
  Usa modelos elípticos de manera reflexiva, para obtener la ecuación ordinaria y transformarla a la general, en situaciones de su contexto.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. / 7.1 Definir metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- **Conocimiento (s):** Lugar geométrico de la elipse / Definición de elementos y trazado de elipse / Ecuación de la elipse: Ordinaria verticales y horizontales con centro dentro y fuera del origen; Ecuación general de la elipse.

Lectura previa

Algunas de las aplicaciones que tiene la elipse:

- Algunas máquinas de **gimnasia** poseen poleas elípticas, así a través de sus poleas puede transmitir una fuerza y permitir ejercitar a un atleta.

-**Engranajes**, los cuales encierran un volumen fijo de un fluido y la rotación del engranaje bombea dicho fluido hacia otra dirección de manera conveniente.

Esto refleja que aparte de los **gimnasios**, las elipses se pueden ver en **motores de combustión intern**a. Igualmente se tienen **espejos elípticos**, que reflejan todos los rayos emitidos por uno de sus focos.

La Elipse

Pero todo lo anterior, tiene una forma matemática de representarse, la cual toma sentido en el plano cartesiano. Antes de ello definamos en un principio el concepto de Elipse como lugar geométrico:

Elipse

Es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano cartesiano tales que la suma de las distancias de ese punto a dos puntos fijos llamados focos es igual a una constante.

La siguiente gráfica representa una elipse, la cual puede ser horizontal o vertical, así como con centro en el origen y fuera de esta. Lo único que cambia entre una horizontal y vertical, es la forma de expresar los elementos y puntos de esta.

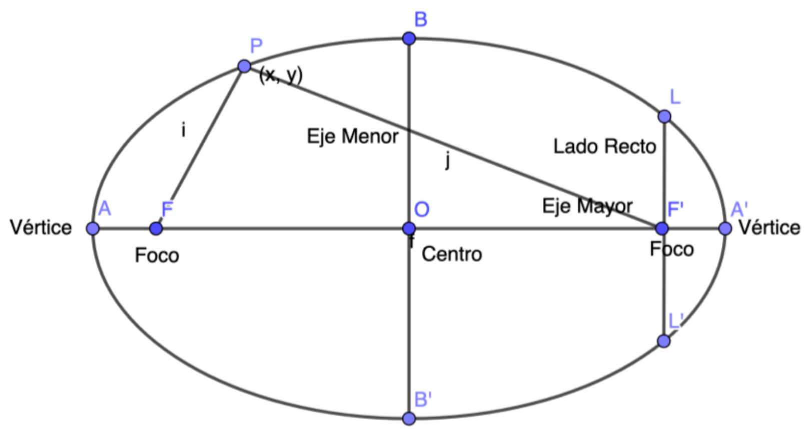


Figura 76

De igual manera, tenemos los mismos elementos para una elipse vertical.
Entre los primeros conceptos que tenemos son:

1. Eje mayor = 2a (distancia de A a A')
2. Eje menor = 2b (distancia de B a B')
3. Eje Focal = 2c (distancia de F a F')

Para obtener la ecuación canónica de una elipse nos basamos de la distancia entre dos puntos, en este caso considerado, a partir de la figura anterior, es la distancia de P hacia F, y de P hacia F', por lo que tenemos que:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Para poder obtener la ecuación de la elipse tomaremos como base los siguientes datos:

$$P(x, y), F(-c, 0), F'(c, 0)$$
$$d_{PA} + d_{PA'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Para simplificar la ecuación anterior, pasamos el segundo radical a la parte derecha de la igualdad y elevamos al cuadrado (esta parte se deja al lector que lo realice) para obtener:

$$cx + a = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevamos de nueva cuenta la igualdad anterior y obtenemos:

$$c^2x^2\text{`}2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

De donde

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ldots (1)$$

Como $2a > 2c$ es $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2$ es un número positivo el cual podemos reemplazar por b^2,

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Por lo que la expresión (1) quedaría como:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Y dividiendo entre a^2b^2 tenemos

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

La cual conocemos como *primera ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen*.

A continuación, enlistaremos de manera directa, todas las ecuaciones y fórmulas que emplearemos para elipse. Todas son consecuencia del proceso anterior, solo que añadiendo nuevas literales.

Elipse Horizontal con centro en el origen	Elipse Vertical con centro en el origen	Elipse Horizontal con centro en (h, k)	Elipse Vertical con centro en (h, k)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

- Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, y a, b, y c están ligados por la relación: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

I. Forma General de la Elipse

Así como la recta, circunferencia y parábola tienen una ecuación general, de la misma manera lo tiene la Elipse, siendo esta:

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Para que la expresión anterior pueda representar una Elipse, los coeficientes A y B deben de cumplir:

1. $A \; y \; B$ del mismo signo
2. $A \neq B$

Ejemplos

Para trabajar con los ejercicios de elipse necesitamos una serie de conocimientos previos los cuales son:

a) Binomio al cuadrado
b) Factorización por término común
c) Factorización completando trinomio cuadrado perfecto
d) Simplificación de fracciones

Ejemplo 1

Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto (0, 3) y la excentricidad es igual a ½, determinar las coordenadas del otro foco, las longitudes de los ejes mayor, menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

Solución:

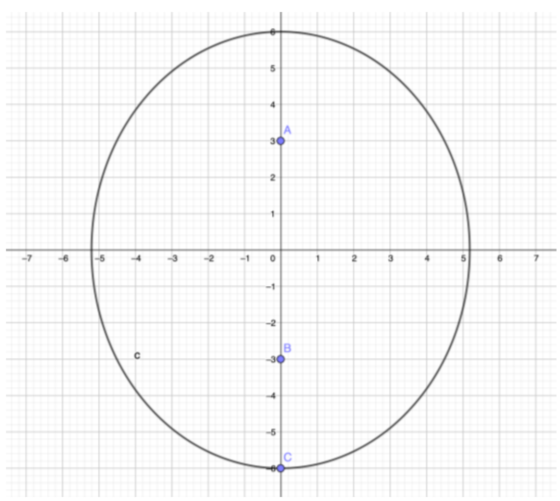


Figura 77

La primera recomendación es realizar el gráfico de manera general para ubicar los datos que nos estén dando en el ejercicio, con la finalidad de poder decidir qué tipo de ecuación es y donde estarían situados los demás datos.

Entre los datos que tenemos del ejercicio son:

a) Su foco tiene por coordenadas (0, 3) y como su centro es el origen, entonces su otro foco está en (0, -3).

A partir de lo anterior, deducimos que el eje focal es $2c = 6, c = 3$.

De igual manera como el eje focal está sobre el eje Y, nos indica que la elipse es vertical.

b) Su excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, pero sustituyendo el valor de c que anteriormente tenemos, nos queda:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} = \frac{3}{a}$$

Despejando a

$$a = 6$$

Y el eje mayor es 2a = 12.

c) Teniendo los valores de a y c, podemos obtener a b partiendo de la relación pitagórica:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejando b

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Sustituyendo a y c:

$$b = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \approx 5.2$$

La longitud del eje menor es 2b = 10.4

d) Con los valores de a, b y c, podemos determinar el valor de lado recto, así como su ecuación:

La longitud del lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(27)}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

La ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Ejemplo 2

Los vértices de una elipse tienen por coordenadas (-3, 7) y (-3,-1) y la longitud de cada lado recto es 2. Determinar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución:

a) Primero ubiquemos los puntos en el plano cartesiano para observar qué tipo de elipse tenemos:

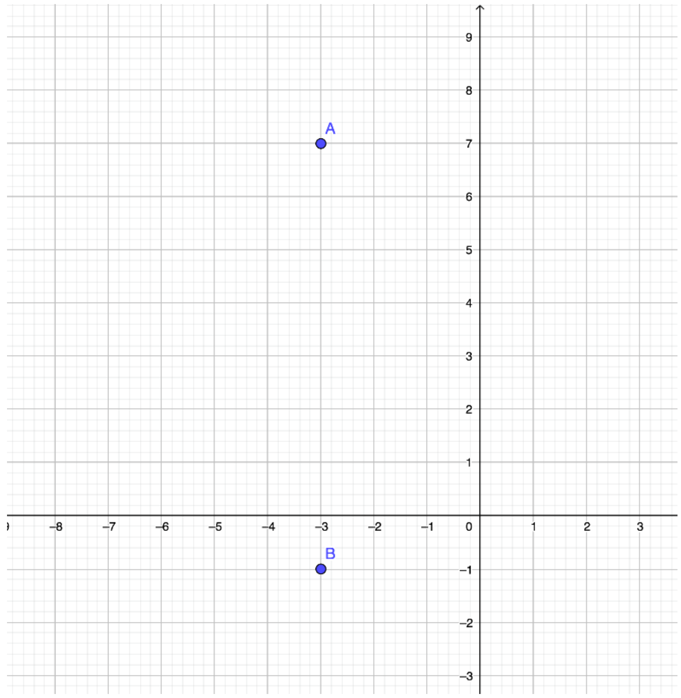


Figura 78

Con la gráfica anterior podemos observar que los puntos forman un segmento vertical, el cual no está situado sobre el eje y, por lo que su centro está fuera del origen y además es vertical. Por lo tanto, su ecuación canónica es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

De lo anterior debemos determinar a, b, h y k.

b) Determinación de los valores
Por los puntos de los vértices que tenemos, el eje mayor:

$$2a=8; a=4$$

Por el valor del lado recto:

$$\frac{2b^2}{a}=2$$

Determinaremos b:

$$b^2=\frac{2a}{2}; b^2=2a; b=\sqrt{4}$$
$$b=2$$

Por lo que el semieje menor $2b=4$.

Determinaremos a c:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}$$
$$c = 2\sqrt{3}$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Coordenadas del centro y los focos
   El centro se encuentra a la mitad de los vértices por lo que sus coordenadas son: (-3, 3).
   Las coordenadas de sus focos serán $F\left(-3, 3 + 2\sqrt{3}\right)\ y\ F'(-3, 3 - 2\sqrt{3})$

   La ecuación canónica por lo tanto es:

$$\frac{\left(x - (-3)\right)^2}{2^2} + \frac{(y - 3)^2}{4^2} = 1$$
$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$$

d) Como apartado extra determinaremos su ecuación general la cual corresponde a resolver el álgebra de la ecuación anterior e igualarlo a 0.

$$\frac{16(x + 3)^2 + 4(y - 3)^2}{64} = 1$$
$$16(x + 3)^2 + 4(y - 3)^2 = 64$$
$$16(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 6y + 9) - 64 = 0$$
$$16x^2 + 96x + 144 + 4y^2 - 24y + 36 - 64 = 0$$
$$16x^2 + 4y^2 + 96x - 24y + 116 = 0$$

Ejemplo 3

La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. *Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, vértices, focos, calcular las longitudes de los ejes mayor, menor y focal, del lado recto y la excentricidad.*

Solución:

Para resolver este problema debemos de aplicar los siguientes conceptos:

- Factorización mediante factor común
- Factorización completando trinomios cuadrados perfectos

a) Asociaremos por variable la ecuación y el término independiente lo mandaremos del otro lado.

$$(x^2 + 2x) + (4y^2 - 12y) = -6$$

b) Factorizamos el 4 en la y.

$$(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

c) Completamos los trinomios para x e y, para luego factorizar.

$$(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 9$$

$$(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

d) Dividimos toda la ecuación entre 4.

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1} = 1$$

e) Obtengamos los elementos a partir de la ecuación anterior.
Busquemos el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejes

$$Mayor\ 2a = 4$$
$$Menor\ 2b = 2$$
$$Focal\ 2c = 2\sqrt{3}$$
$$Lado\ recto \frac{2b^2}{a} = \frac{2(1)}{2} = 1$$

Centro:

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

Focos:

$$\left(-1, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)\ y \left(-1, +\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$$

Vértice:

$$\left(-3, -\frac{1}{2}\right)\ y\ \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Extremos eje menor

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)\ y \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo aplicado

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita elíptica, con la Tierra en uno de sus focos. La excentricidad 0.055 y la longitud del eje mayor de esta órbita es de 468 972 millas. ¿Cuál es la distancia más cercana de la Tierra a la Luna?

Solución:

Los datos que tenemos de la elipse son:

$$e = 0.055$$
$$2a = 468\,972$$

Entonces

$$a = \frac{468972}{2} = 234486$$
$$e = \frac{c}{a}; c = e * a = 0.055 * 234486 = 12896.73$$
$$a^2 = b^2 + c^2; b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{234486^2 - 12896.73^2} = 221589.27$$

Resultado:

$$b = 221589.27\ millas$$

Actividad 5.1

Instrucciones

1. Resuelve correctamente cada uno los siguientes ejercicios que a continuación se te presentan.
2. La solución la puedes hacer en la libreta que tengas destinada para la asignatura. Recuerda haber realizado un separador de bloque para llevar un control del mismo. En el caso de no contar con una libreta para la asignatura, puedes realizarlos en hojas reciclables o en blanco, exclusivos para esta sección.
3. Para las gráficas puedes hacer uso de Geogebra en su versión móvil o de escritorio para corroborar que la ecuación obtenida sea la correspondiente al problema.

Ejercicios:

1. Determina las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Al final trazar la gráfica de estos en planos separados.
   a) $9x^2 + 4y^2 = 36$
   b) $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. Los vértices de una elipse son los puntos (0, 6), (0, -6) y sus focos son los puntos (0, 4), (0, -4). Determinar su ecuación.

3. Determinar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (2, 0), (-2, 0) y su excentricidad es igual a 2/3.
4. Los focos de una elipse son los puntos (3, 0), (-3, 0), y la longitud de uno cualquiera de sus lados restos es igual a 9. Determinar la ecuación de la elipse.
5. Los focos de una elipse son los puntos (-4, -2) y (-4, -6) y la longitud de cada lado recto es 6. Determinar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.
6. Los vértices de una elipse son los puntos (1, -6) y (9, -6) y la longitud de cada lado recto es 9/2. Determinar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y excentricidad.
7. Los focos de una elipse son los puntos (3, 8) y (3, 2) y la longitud de su eje menor es 8. Determinar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.
8. El Centro de una elipse es el punto (-2, -1 y uno de sus vértices es el punto (3, -1). Si la longitud de cada lado recto es 4, determinar la ecuación de la elipse, su excentricidad, las coordenadas de sus focos.
9. Reduce cada una de las ecuaciones ordinarias de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.
   a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$
   b) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación número 12

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

INSTRUMENTOS PARA EVALUACIÓN

Instrumento 1. Lista de cotejo para evaluar las actividades del bloque cero

Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Realiza la siguiente autoevaluación de tu desempeño en el bloque cero, considera los criterios de la lista de cotejo marca con una X de acuerdo con los siguientes niveles:

1= necesito ayuda **2=Puedo hacerlo solo** **3=Puedo ayudar a otros**

AUTOEVALUACIÓN	Nivel		
Criterios	**1**	**2**	**3**
Calcula expresiones numéricas sencillas con números enteros y racionales, aplicando correctamente las reglas de los signos y signos de agrupación.			
Identifica un binomio al cuadrado y un TCP			
Utiliza correctamente la técnica para completar el trinomio cuadrado perfecto			
Identifica en un triángulo rectángulo los catetos y la hipotenusa y emplea el teorema de Pitágoras en la solución de ejercicios			
Resuelve ejercicios en los cuales se despeja una variable de una expresión algebraica, usando la transposición de términos			
Resuelve sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método algebraico: reducción (suma y resta)			
Resuelve sistemas de ecuaciones con tres incógnitas mediante métodos: reducción (suma y resta) y determinantes			

¿Qué puedo hacer para mejorar?

____

____

____

Instrumento 2. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1 del bloque uno

Conocimientos: Lugar geométrico de líneas rectas y curvas/ Sistemas de Coordenadas rectangulares	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Usa los conceptos básicos de la Geometría Analítica promoviendo el pensamiento reflexivo y lógico como una nueva forma de interpretar su entorno espacial; contribuyendo a la construcción de nuevos conocimientos que aplique en su vida cotidiana.	**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Actividad de aprendizaje: lugar geométrico de líneas rectas y curvas sistemas de coordenadas rectangulares

Criterios de Evaluación	Escala de valoración			
	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió la actividad en su libreta	20			
Ubicó correctamente los puntos en el plano cartesiano	20			
Unió correctamente los puntos e identificó la figura	20			
Comprendió el tema de plano cartesiano	20			
Calificación obtenida				

Instrumento 3. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 del bloque uno.

Conocimientos: Segmentos rectilíneos / Distancia entre dos puntos/ División de un segmento en una razón dada.	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Usa los conceptos básicos de la Geometría Analítica promoviendo el pensamiento reflexivo y lógico como una nueva forma de interpretar su entorno espacial; contribuyendo a la construcción de nuevos conocimientos que aplique en su vida cotidiana.	**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Actividad de aprendizaje: CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE RECTAS, SEGMENTOS				
Criterios de Evaluación	Escala de valoración			
	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Halla correctamente la distancia entre dos puntos	10			
Halla correctamente el valor de la incógnita faltante en la coordenada	20			
Halla correctamente la razón y el punto razón en un segmento de recta	20			
Identifica correctamente si los puntos son colineales	10			
Identifica correctamente los triángulos escaleno, equilátero o isósceles hallando la distancia de sus lados	10			
Copió y resolvió los ejercicios en la libreta	10			
Calificación obtenida				

Instrumento 4. Lista de cotejo para evaluar la actividad 3 del bloque uno

Conocimientos: Perímetros y áreas de figuras en el plano.	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Emplea el cálculo de perímetros y áreas en el plano cartesiano para resolver creativamente, problemáticas de su contexto	**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Actividad de aprendizaje: PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS EN EL PLANO				
Criterios de Evaluación	Escala de valoración			
	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Grafica correctamente los vértices del polígono.	10			
Descompone el polígono en triángulos correctamente	15			
Halla correctamente el área del polígono con la fórmula de Herón.	15			
Aplica correctamente la fórmula de distancia entre dos puntos	5			
Emplea correctamente la regla de Sarrus para hallar área del polígono	15			
Expresa correctamente el resultado obtenido.	10			
Copió y resolvió los ejercicios en la libreta	10			
Calificación obtenida				

Instrumento 5. Lista de cotejo para evaluar las actividades 1.1 y 1.2 del bloque dos

Conocimientos: razón de cambio / pendiente / condiciones de paralelismo y perpendicularidad / ángulo entre dos rectas	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Calcula la pendiente, el ángulo de inclinación y el ángulo entre dos rectas, promoviendo la creación de nuevos conocimientos que favorezca la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas en su entorno.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: __________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

Criterios de evaluación	Cumple		Ponderación	Total
	Si = 1	No=0		
La actividad se entregó en tiempo y forma			5	
La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha)			5	
Los ejercicios están enumerados correctamente.			5	
El alumno describe el procedimiento para calcular la pendiente, el ángulo de inclinación y el ángulo de dos rectas de los ejercicios propuestos			40	
El alumno distingue entre rectas paralelas y perpendiculares mediante el análisis de las pendientes			20	
El alumno calcula correctamente el 90-100% de los ejercicios propuestos			20	
La actividad se encuentra limpia y sin tachaduras			5	
Total:				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 6. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 del bloque dos

Conocimientos: Formas de la ecuación de la recta/punto-pendiente/Dos puntos/Pendiente-Ordenada/Simétrica/General/Normal/Distancia de un punto a una recta	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Emplea las diferentes formas de la ecuación de la recta favoreciendo su pensamiento crítico y el trabajo metódico en la resolución de situaciones del ambiente que lo rodea.	**Atributos:** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

Criterios de evaluación	Cumple		Ponderación	Total
	Si = 1	No=0		
La actividad se entregó en tiempo y forma			5	
La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha)			5	
Los ejercicios están enumerados correctamente.			5	
El alumno identifica correctamente la ecuación de la recta a utilizar en cada problema.			40	
El alumno desarrolla las ecuaciones correctamente hasta llegar a la ecuación general			20	
El alumno realiza correctamente la gráfica de cada ecuación en una hoja cuadriculada, utilizando su juego de geometría.			20	
La actividad se encuentra limpia y sin tachaduras			5	
Total:				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 7. Lista de cotejo para evaluar la actividad 3 del bloque dos

Conocimientos: Distancia de un punto a una recta	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Emplea las diferentes formas de la ecuación de la recta favoreciendo su pensamiento crítico y el trabajo metódico en la resolución de situaciones del ambiente que lo rodea.	**Atributos:** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ____________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

Criterios de evaluación	Cumple		Ponderación	Total
	Si = 1	No=0		
La actividad se entregó en tiempo y forma			5	
La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha)			5	
Los ejercicios están enumerados correctamente.			5	
El alumno utilizó y desarrolló correctamente la fórmula de la distancia de un punto a una recta			40	
El alumno expresa correctamente el resultado obtenido.			20	
El alumno construye adecuadamente la gráfica que representa la distancia solicitada.			20	
La actividad se encuentra limpia y sin tachaduras			5	
Total:				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 8. Lista de cotejo 3.1. Rectas y segmentos de la circunferencia del bloque tres

Conocimientos: Lugar geométrico de la circunferencia.	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Aplica los conocimientos sobre la circunferencia y sus elementos, externando un pensamiento crítico y reflexivo para solucionar diferentes problemáticas de su entorno	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

Criterio	SI	NO	Ponderación	Total
Utiliza colores diferentes para cada recta, segmento y punto			10	
Identifica de manera clara la diferencia entre recta y segmento			30	
Clasifica correctamente las rectas y segmentos			30	
Entrega en tiempo y forma			10	
Presenta el trabajo de manera limpia y ordenada			10	
Contiene los datos de identificación del estudiante			10	
			Calificación final	

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 9. Lista de cotejo 3.2. Ejercicios de las ecuaciones de la circunferencia del bloque tres

Conocimientos: Ecuación de la circunferencia/ Forma ordinaria con centro en el origen y fuera de él/ Forma general/ Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos.	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Aplica los conocimientos sobre la circunferencia y sus elementos, externando un pensamiento crítico y reflexivo para solucionar diferentes problemáticas de su entorno	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

Criterio	SI	NO	Ponderación	Total
Comprende el problema y lo transforma en un proceso que involucra la ecuación de la circunferencia y sus elementos.			10	
Identifica correctamente la relación entre el contexto y el concepto de la geometría analítica.			10	
Establece un proceso adecuado para la determinación de la ecuación de la circunferencia con los datos proporcionados			10	
Relaciona de manera correcta la representación gráfica con la ecuación que le corresponde.			10	
Determina de manera apropiada, desde las condiciones del problema, la ecuación de la circunferencia.			10	
Identifica y/o determina correctamente las coordenadas del centro.			10	
Identifica y/o determina correctamente la longitud del radio.			10	
Interpreta el significado del centro y radio en el contexto del problema.			5	
Justifica de manera correcta la respuesta con procedimientos claros y completos			10	
La actividad fue entregada en tiempo y forma.			5	
La gráfica es realizada correctamente, señala centro y radio.			10	
			Calificación Total	

Observaciones:
____

Instrumento 10. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1 del bloque cuatro

Conocimientos: Lugar geométrico de la parábola. / Definición, elementos y trazado de la parábola / Ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice en y fuera del origen.	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Construye mediante la parábola y sus elementos. soluciones creativas a problemáticas del medio que lo rodea.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas
Nombre del alumno: ________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ________________________________	Fecha: ________________

Lista de cotejo

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una ***palomita*** los indicadores que estés cumpliendo o no estés cumpliendo, en caso de que no se haya cumplido con el indicador, escribe el motivo en la columna de observaciones. Para obtener la calificación final deberás sumar la columna de registro de cumplimiento.

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	El trabajo tiene hoja de presentación	5			
2	Da evidencia de la comprensión adecuada del concepto de la parábola.	20			
3	Demuestra dominio y conocimiento de los parámetros o elementos de la parábola.	20			
4	Para el llenado de la tabla, encuentra de manera correcta los valores solicitados y sus procedimientos para hallarlos son correctos.	20			
5	Realiza la representación gráfica de los ejercicios proporcionados.	20			
6	Tiene un 90-100 % de los resultados de manera correctos.	5			
7	El trabajo es entregado en tiempo y forma a través de classroom o WhatsApp, según las indicaciones del docente.	10			
CALIFICACIÓN FINAL					

Instrumento 11. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 bloque cuatro

Conocimientos: Lugar geométrico de la parábola. / Definición, elementos y trazado de la parábola / Ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice en y fuera del origen.	**Asignatura:** Matemáticas III
Aprendizaje esperado: Construye mediante la parábola y sus elementos. soluciones creativas a problemáticas del medio que lo rodea.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una ***palomita*** los indicadores que estés cumpliendo o no estés cumpliendo, en caso de que no se haya cumplido con el indicador, escribe el motivo en la columna de observaciones. Para obtener la calificación final deberás sumar la columna de registro de cumplimiento.

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	El trabajo tiene hoja de presentación	5			
2	Resuelve de manera correcta las factorizaciones y binomios al cuadrado.	20			
3	Aplica de manera correcta las fórmulas y elementos de la parábola para la resolución de los ejercicios.	20			
4	Resuelve de manera correcta las operaciones con fracciones y operaciones que involucren las leyes de los signos.	20			
5	Realiza la representación gráfica de los ejercicios proporcionados.	20			
6	Tiene un 90-100 % de los resultados de manera correctos.	5			
7	El trabajo es entregado en tiempo y forma a través de classroom o WhatsApp, según las indicaciones del docente.	10			
CALIFICACIÓN FINAL					

Instrumento 12. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 bloque cuatro

Conocimientos: Lugar geométrico de la elipse / Definición de elementos y trazado de elipse / Ecuación de la elipse: Ordinaria verticales y horizontales con centro dentro y fuera del origen; Ecuación general de la elipse.	**Asignatura:** Matemáticas III
➢ **Aprendizaje esperado:** Emplea la elipse y sus elementos para solucionar colaborativamente problemáticas en su vida cotidiana. Usa modelos elípticos de manera reflexiva, para obtener la ecuación ordinaria y transformarla a la general, en situaciones de su contexto.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. / 7.1 Definir metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

PRESENTACIÓN		
INDICADORES	CUMPLE	PONDERACIÓN
1. Se entrega de manera limpia y ordenado el trabajo.	Si ( ) No ( )	5%
2. El trabajo es entregado en tiempo y forma.	Si ( ) No ( )	5%
3. Contiene los datos del estudiante: Nombre completo, tarea #, fecha, semestre y grupo.	Si ( ) No ( )	5%
4. No se encuentra la teoría combinada con los resultados de los ejercicios.	Si ( ) No ( )	5%
Total: Máximo 20%		
RESOLUCIÓN		
1. Los ejercicios presentan una solución matemática mediante pasos ordenados.	Si ( ) No ( )	5%
2. Se presentan todos los procesos de solución del ejercicio completo.	Si ( ) No ( )	5%
3. Los resultados son remarcados al final de cada ejercicio para su verificación.	Si ( ) No ( )	5%
4. Se hacen las construcciones gráficas en los ejercicios que así lo ameritan o lo indican en las instrucciones.	Si ( ) No ( )	5%
5. Las operaciones se presentan de manera condensada, sin tantos pasos, haciendo alusión al uso de la calculadora (científica o del teléfono celular).	Si ( ) No ( )	5%
6. Hace las interpretaciones pertinentes en cada uno de los ejercicios que lo solicite.	Si ( ) No ( )	5%
Total: Máximo 30%		
VERIFICACIÓN DE CADA EJERCICIO		
El profesor se encargará de llevar a cabo una revisión de cada		

uno de los resultados y procedimientos completos para poder asignar una puntuación máximo del 50%. Todo esto dependerá de los siguientes rubros: a) Procedimiento (el profesor tiene la decisión de contemplar puntos parciales o no por tener un proceso correcto) b) Resultado (el profesor tiene la decisión de contemplar puntos parciales por respuesta incorrecta, pero procedimiento correcto, por unidades o variaciones en las numeraciones) c) Ponderación del 50% a cada uno de los ejercicios de cada actividad, según la complejidad que esté presente.		
Total: 50% máximo		
Presentación		
Resolución		
Verificación		
Total:		

ANEXOS

Anexo 1. Manual de descarga de Geogebra

Geogebra es un software libre del área de matemáticas, mundialmente utilizado por los estudiantes de bachillerato, incluso de cualquier nivel educativo, ya que es un software intuitivo que te permite realizar gráficas, construir figuras geométricas, realizar cálculos algebraicos, estadísticos y con un potencial enorme para acompañar tu proceso de aprendizaje. Está dividida en varias secciones, para abordar contenidos relacionados a las asignaturas de álgebra, cálculo, geometría, probabilidad, incluso tiene gráficas en 3D con Realidad Aumentada que te permitirán visualizar elementos matemáticos en un nivel fantástico

En esta asignatura y en las posteriores, puedes utilizar esta herramienta como apoyo para el aprendizaje de los conocimientos que se abordarán, necesitarás tiempo para dominar todas sus funciones, pero con un poco de esfuerzo lo lograrás y terminarás adorándola.

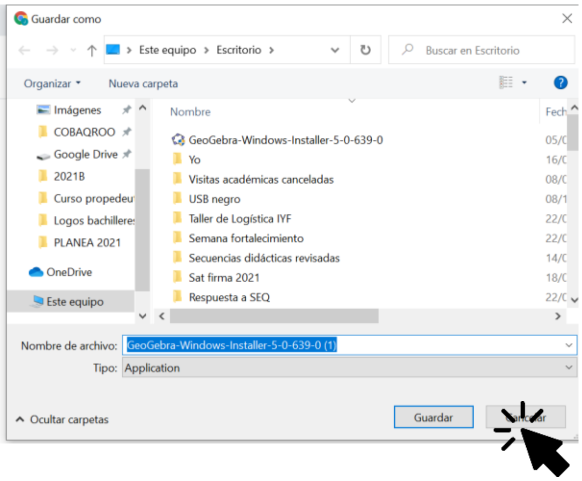
Está disponible de manera gratuita, la cual podrás descargar a través de un navegador en tu computadora o en tu dispositivo móvil (compatible con Android e IOS).

Ahora te enseñaremos cómo descargarla en ambos dispositivos (computadora y móvil), para lo cual necesitarás conectarte a Internet.

Ingresa desde el navegador Chrome a https://www.geogebra.org/download?lang=es

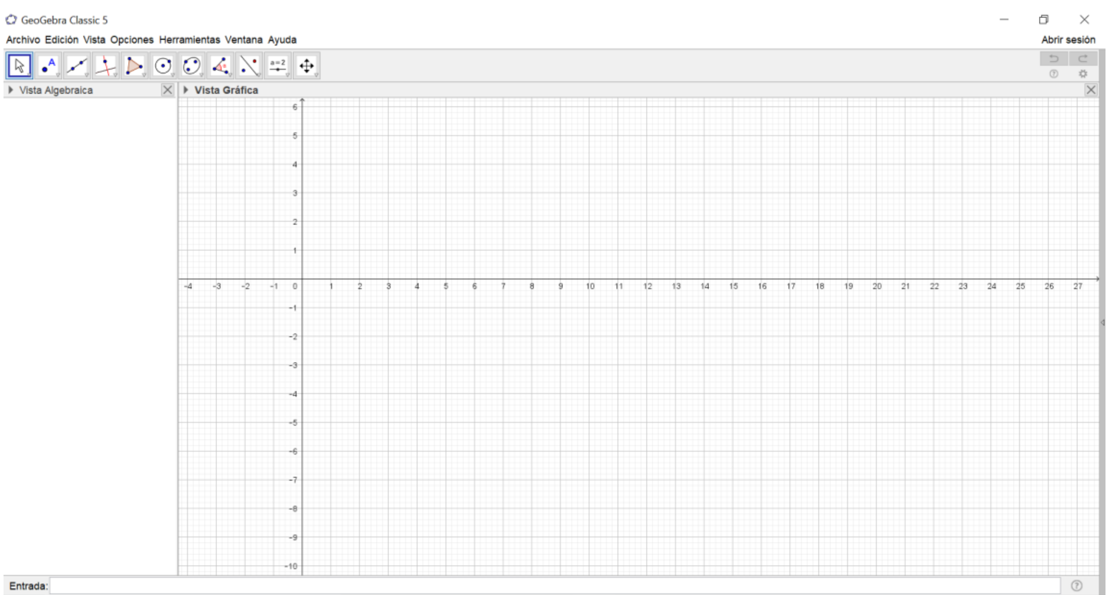
1 Ubica la aplicación **Geogebra 5.0** y da click en **descargar**

2 Guarda el archivo de descarga en tu escritorio, en los siguientes minutos comenzará la descarga



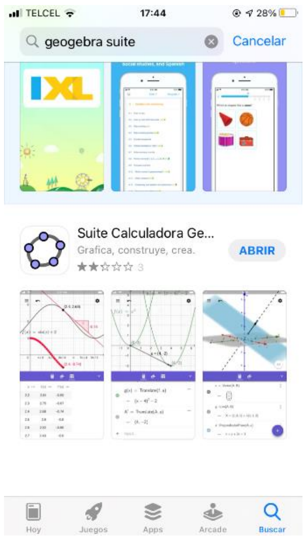
3 En el escritorio de tu computadora, da click en el archivo que se descargó y sigue las instrucciones de instalación

4 **¡Listo! La aplicación ya puede ser usada**



Ingresa desde la tienda **Google Play Store** (Android) o **App store** (IOS)

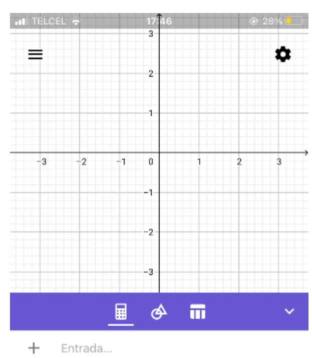
1 Busca la aplicación **Geogebra Suite**



2 Una vez instalada la app en tu celular, selecciona el icono para abrirla

3 Selecciona la aplicación de matemáticas que utilizarás

4 **¡Listo! La aplicación ya puede ser usada**



MATERIAL SUGERIDO PARA CONSULTA

Aprende Matemáticas. (s.f.). *Ecuación formal de la recta*. Recuperado de https://www.aprendematematicas.org.mx/

Castillo, E. R. (2012). *Matemáticas III.* México: Gafra.

CONAMAT. (2010). *Geometría analítica y trigonometría*. México: Pearson Educación.

Coronilla, A. A. (2014). *Vive las Matemáticas 3.* México D.F: Progreso Editorial.

Escalante, L. (2018). *Matemáticas III*. México: Book Mart

García, M. A. (2012). *Matemáticas 3.* México: Esfinge.

Geometría analítica 3 (s.f.). *Distancia entre dos puntos* [blog] . Recuperado de: https://sites.google.com/site/geometriaanalitica3o/distancia-entre-dos-puntos

Julián, C. (12 de 05 de 2021). *FISIMAT: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen.* Recuperado de https://www.fisimat.com.mx/ecuacion-de-la-circunferencia-con-centro-fuera-del-origen/

Kindle, J. H., & Gutiérrez, D. L. (2007). *Geometría analítica*. México, D.F: Mc Graw Hill.

Lehmann, C. H., & García, D. R. (2014). *Geometría analítica*. México: Limusa

Mata Holguín , P. (2016). *Matemáticas 3.* Mexico: ST-Editorial.

Matesfacil (s.f.). *Triángulos: áreas*. Recuperado de: https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/triangulos/area/area-triangulos-formula-ejemplos-formula-heron-semiperimetro-base-altura-problemas-demostracion.html

Marín, L. y Isaza, P. (2011). *Historia de las cónicas*. Recuperado de: https://liceth-marin.webnode.es/historia-de-las-conicas-/

Pérez, L. E. (2018). *Matemáticas III.* México: Book Mart.

TodaMateria contenidos escolares (09 de Marzo de 2020). *Plano cartesiano.* Recuperado de: https://www.todamateria.com/plano-cartesiano/

Ruiz Basto, J. (2005). *Matemáticas III. Geometría Analítica Básica.* México: Publicaciones cultura.

Solecito (s.f.). *La circunferencia, sus rectas, segmentos y ángulos* [blog]. Recuperado de: http://solecito21roch.blogspot.com/2012/09/la-circunferencia-sus-rectas-segmentos.html

Salazar Vázquez , P. (2018). *Matemáticas 3.* Xalapa Veracruz: Nueva Imágen.

BIBLIOGRAFÍA

Aprende Matemáticas. (s.f.). *Ecuación formal de la recta*. Recuperado de https://www.aprendematematicas.org.mx/

Campos, F. J. O., Cerecedo, F. J. O., & Cerecedo, F. J. O. (2018). *Matemáticas 3* : Grupo Editorial Patria

Castillo, E. R. (2012). *Matemáticas III*. México: Gafra.

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo (2021). *Material didáctico del estudiante: Matemáticas I*. Quintana Roo: COBAQROO.

CONAMAT. (2010). *Geometría analítica y trigonometría*. México: Pearson Educación.

Coronilla, A. A. (2014). *Vive las Matemáticas 3*. México D.F: Progreso Editorial.

Escalante, L. (2018). *Matemáticas III*. México: Book Mart

García, M. A. (2012). *Matemáticas 3*. México: Esfinge.

Geometría analítica 3 (s.f.). *Distancia entre dos puntos* [blog] . Recuperado de: https://sites.google.com/site/geometriaanalitica3o/distancia-entre-dos-puntos

Ibarra Escobar, J., Cazares Cordero, J., Espinoza Díaz, J. and Rodríguez Chávez, M., 2019. *Matemáticas III*. 1st ed. Colima: Conecta Editores.

Julián, C. (12 de 05 de 2021). *FISIMAT: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen*. Recuperado de https://www.fisimat.com.mx/ecuacion-de-la-circunferencia-con-centro-fuera-del-origen/

Khan Academy (s.f.). *Repaso de completar el cuadrado*. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:quadratic-functions-equations/x2f8bb11595b61c86:completing-square-quadratics/a/completing-the-square-review

Kindle, J. H., & Gutiérrez, D. L. (2007). *Geometría analítica*. México, D.F: Mc Graw Hill.

Lehmann, C. H., & García, D. R. (2014). *Geometría analítica*. México: Limusa

Mata Holguín , P. (2016). *Matemáticas 3*. Mexico: ST-Editorial.

Matesfacil (s.f.). *Triángulos: áreas*. Recuperado de: https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/triangulos/area/area-triangulos-formula-ejemplos-formula-heron-semiperimetro-base-altura-problemas-demostracion.html

Matetres14 (s.f.). *Completar el trinomio cuadrado perfecto* [blog]. Recuperado de https://matetres14.com/completar-el-trinomio-cuadrado-perfecto/

Marín, L. y Isaza, P. (2011). *Historia de las cónicas*. Recuperado de: https://liceth-marin.webnode.es/historia-de-las-conicas-/

Pérez, L. E. (2018). *Matemáticas III*. México: Book Mart.

Rodríguez Nungaray, S. L., Maya Díaz, V., & Salvador Cano, L. E. (2018). *Matemáticas III* (1st ed., Vol. 1). Umbral.

Ruiz Basto, J. (2005). *Matemáticas III. Geometría Analítica Básica.* México: Publicaciones cultura.

Salazar Vázquez , P. (2018). *Matemáticas 3.* Xalapa Veracruz: Nueva Imágen.

Secretaría de Educación de Campeche (2021). *Matemáticas 1 ° Secundaria: Ecuaciones de primer grado*. Recuperado de https://media.educacioncampeche.gob.mx › file

Solecito (s.f.). *La circunferencia, sus rectas, segmentos y ángulos* [blog]. Recuperado de: http://solecito21roch.blogspot.com/2012/09/la-circunferencia-sus-rectas-segmentos.html

Subsecretaría de Educación Media Superior (2020). *Evaluación diagnóstica al ingreso a la educación media superior 2020-2021*. México: Secretaría de Educación Pública.

Swokowski, Earl W., & Jeffery, A. Cole. (2006). *Algebra y trigonometría con geometría analítica/ Algebra And Trigonometry With Analytic Geometry*. Cengage Learning Latin America.

TodaMateria contenidos escolares. (09 de Marzo de 2020). *Plano cartesiano.* Recuperado de: https://www.todamateria.com/plano-cartesiano/